PROBLEMAS PARA PREPARAR UNA OLIMPIADA DE FÍSICA

MECÁNICA III

18.-Encontrar la velocidad con que cambia el periodo T de la Tierra alrededor del Sol debido a la pérdida de masa del astro cuya potencia radiada es P =3,90.10^{26} J. Se supone que la órbita de la Tierra no cambia.
Datos : Masa del Sol = 2.10^{30} kg, velocidad de la luz c = 3.10^{8} m/s

Admitimos que la órbita terrestre es una circunferencia de radio d. La fuerza centrípeta que necesita la Tierra para girar alrededor del Sol es precisamente la fuerza de atracción gravitatoria entre ambos cuerpos celestes

$$\frac{GM_S * M_T}{d^2} = \frac{M_T v^2}{d} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{GM_S}{d}} = v = \frac{2\pi\ d}{T} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{d^3}{GM_S}}$$

La velocidad de cambio de T con el tiempo vale.

$$\frac{dT}{dt} = 2\pi\sqrt{\frac{d^3}{G}} * \frac{-\frac{1}{M_S^2}\frac{dM_S}{dt}}{2\sqrt{\frac{1}{M_S}}} = \pi\sqrt{\frac{d^3}{GM_S^3}} * \left(-\frac{dM_S}{dt}\right) \quad (1)$$

Para hallar la variación de la masa del Sol con respecto del tiempo tenemos en cuenta la relación de Einstein, $E = mc^2$.

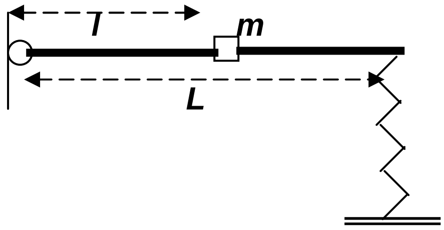
$$P = \frac{dE}{dt} = -\frac{dM_S}{dt} * c^2 \quad (2)$$

El signo menos indica que existe pérdida de masa. Llevamos a la ecuación (1) la (2)

$$\frac{dT}{dt} = \pi\sqrt{\frac{d^3}{GM_S^3}} * \left(-\frac{dM_S}{dt}\right) = \frac{2}{2}\pi\sqrt{\frac{d^3}{GM_S^3}}\frac{P}{c^2} = \frac{T}{2}\frac{P}{M_S c^2}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{(365 * 86400) * 3{,}90.10^{26}}{2 * 2.10^{30} * (3.10^8)^2} = 3{,}4.10^{-14} \quad \frac{s}{\text{año}}$$

19.- Una barra sin peso de longitud L tiene un extremo ligado a una articulación ideal y el otro se apoya sobre un muelle cuya constante elástica es k. Sobre la barra se sitúa una masa puntual m a una distancia l de la articulación (ver figura inferior).

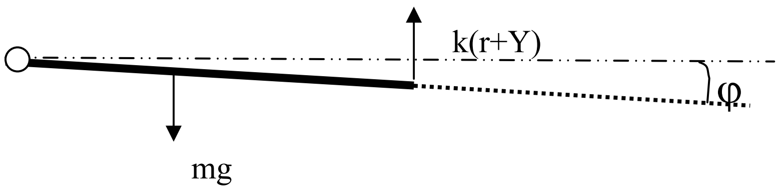


La barra se separa ligeramente de la posición de equilibrio y se deja en libertad. Determinar el periodo de las oscilaciones.

Cuando la barra está sin la masa m, el muelle tiene su longitud natural. Al colocar sobre ella la masa m el muelle se encoge una distancia r y en el equilibrio se cumple que los momentos de las fuerzas respecto de la articulación son iguales:

$$mg * l = kr * L \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{mgl}{kL}$$

Si ahora separamos la masa m una distancia de la anterior posición de equilibrio el sistema oscila. Cuando el muelle ocupa la posición r +Y , el momento de la fuerza elástica tiende a llevar a la barra a su posición de equilibrio.
El momento de la fuerza peso es de signo contrario al momento de la fuerza elástica



$$k(r+Y) * L - mgl = I\alpha \quad ; \quad k\left(\frac{mgl}{kL} + Y\right) * L - mgl = ml^2\alpha \quad \Rightarrow \quad kLY = ml^2\alpha \ (1)$$

Para una desviación Y del muelle la masa m se desvía proporcionalmente a la distancia a la articulación

$$\frac{x}{l} = \frac{Y}{L} \qquad \Rightarrow \qquad Y = \frac{xL}{l} \ (2)$$

Llevando (2) a (1) y teniendo en cuenta que el valor del arco es igual al del ángulo (en radianes) por el radio ,resulta:

$$kL\frac{xL}{l} = ml^2\alpha \quad \Rightarrow \quad k\frac{L^2}{l}\ \varphi\ l = ml^2\alpha \quad \Rightarrow \quad k\frac{L^2}{ml^2}\varphi = \alpha \quad \Rightarrow \quad K_1\varphi = \alpha$$

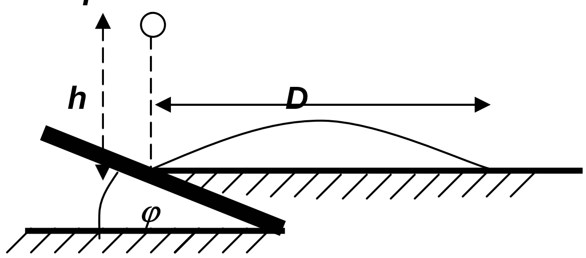
Encontramos que la aceleración angular es directamente proporcional al ángulo girado, en consecuencia si el momento de las fuerzas es proporcional al ángulo resulta

$$M = K_2\varphi = I\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \frac{K_2}{I}\varphi = \alpha \quad \Rightarrow \quad K_1 = \frac{K_2}{I}$$

El periodo vale:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K_1 I}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\frac{kL^2}{ml_2}}} = 2\pi\frac{1}{L}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

20.- Desde una altura h se deja caer una esfera sobre una plancha firmemente sujeta al suelo que forma un ángulo φ con la horizontal. La esfera rebota y choca contra el suelo a una distancia D del impacto inicial.



Determinar el valor del ángulo φ para el que la distancia D es la máxima posible. Se supone que el choque es completamente elástico (e = 1)

Consideremos unos ejes coordenados u, w, como indica la figura 1

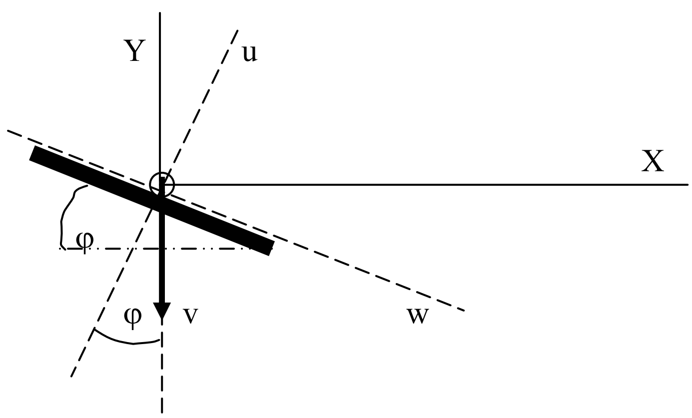


Fig.1

La velocidad v de la esfera al chocar contra la plancha vale $v = \sqrt{2gh}$ .Las componentes de la velocidad después del choque medidas sobre el sistema de coordenadas u,w valen

$$v_u = v\cos\varphi \quad ; \quad v_w = v\,\mathrm{sen}\varphi$$

Por ser el choque elástico la componente de v sobre u es igual a la componente de llegada sobre ese eje cambiada de signo y la w es la misma ya que sobre ese eje no hay interacción entre la plancha y la esfera. Para calcular el valor de D tomamos otros ejes de referencia, XY tal como indica la figura 1. Las componentes de la velocidad sobre esos nuevos ejes son:

$$v_X = v_u \text{sen}\varphi + v_W \cos\varphi = \sqrt{2gh}\text{sen}\varphi \ \cos\varphi + \sqrt{2gh}\text{sen}\varphi \ \cos\varphi = \sqrt{2gh}\text{sen}2\varphi$$

$$v_Y = v_u \boldsymbol{cos}\varphi - v_W \boldsymbol{sen}\varphi = \sqrt{2gh} \ \cos^2\varphi \ + \sqrt{2gh} \ \text{sen}^2\varphi \ = \sqrt{2gh} \ \cos2\varphi$$

Las coordenadas de posición de la esfera respecto de los ejes XY son:

$$x = \sqrt{2gh}\text{sen}2\varphi \ t \quad ; \quad y = \sqrt{2gh}\cos2\varphi \ t - \frac{1}{2}gt^2$$

Cuando la coordenada y = 0 la x = D

$$t = \frac{2\sqrt{2gh}\cos2\varphi}{g} \quad \Rightarrow \quad x = D = \sqrt{2gh} \ \text{sen}2\varphi * \frac{2\sqrt{2gh}}{g}\cos \ 2\varphi = 2h\text{sen} \ 4\varphi$$

Como queremos que d sea un máximo derivamos la función anterior respecto de φ e igualamos a cero.

$$\frac{dD}{d\varphi} = 2h\cos4\varphi * 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos4\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 22{,}5^o \ ; \ D = 2h$$

21.- Una barra de longitud L se encuentra apoyada en el suelo y sobre una pared vertical. Si comienza a deslizarse apoyándose en la pared vertical con una velocidad constante v_Y, determinar cuál es la velocidad del otro extremo de la barra

Cualquiera que sea la posición de la barra se cumple que

$$x^2 + y^2 = L^2 \qquad (1)$$

Por otra parte las velocidades cumplen las relaciones $v_x = \frac{dx}{dt} \quad ; \quad v_y = \frac{dy}{dt}$

Si diferenciamos la expresión (1) resulta:

$$2\boldsymbol{x} \ \boldsymbol{dx} + 2\boldsymbol{y} \ \boldsymbol{dy} = 0$$

que llevada a las expresiones de la velocidad

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{y \ dy}{x \ dt} = \frac{y}{\sqrt{L^2 - y^2}} * v_y$$

A medida que y tiende a cero la velocidad de x también lo hace.

22.- Una cuña C en forma de plano inclinado 30º tiene una masa de m_C=30 kg. Sobre ella descansa una masa A de m_A=12 kg. Si no existen rozamientos determinar la aceleración de la cuña respecto del suelo y la aceleración relativa de la masa respecto de la cuña.

Analizamos el movimiento de la masa desde un sistema ligado a la cuña que al no ser inercial nos obliga a introducir una fuerza de inercia.

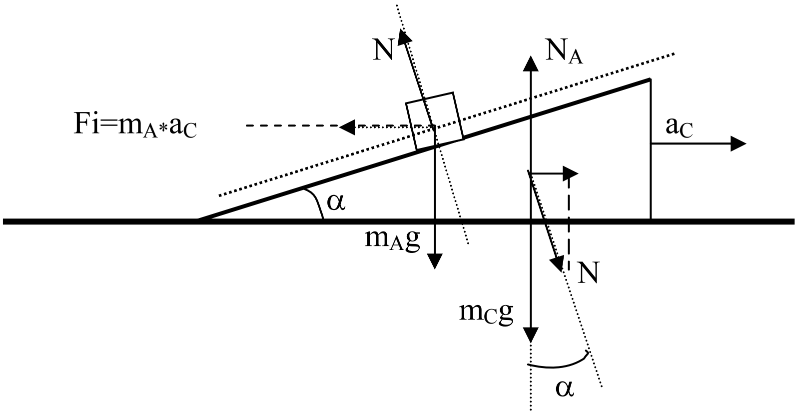


Fig.1

En la figura 1 están representadas las fuerzas que actúan sobre la masa A y sobre la cuña. En esta última N representa la reacción de la N que actúa sobre la masa A.

Para la masa A y el eje paralelo al plano inclinado tenemos:

$$m_A g * sen\alpha + m_A * a_C cos\alpha = m_A * a_{A/C} \quad (1)$$

en esta expresión $a_{A/C}$, representa la aceleración relativa de la masa A respecto de la cuña C.

Para la masa A respecto el eje perpendicular al plano inclinado

$$N + m_A * a_C \ sen\alpha = m_A g \ cos\alpha \quad (2)$$

Para la cuña C tenemos que su aceleración respecto del suelo es provocada por la componente horizontal de N

$$Nsen\alpha = m_C * a_C \ (3)$$

Despejamos N de la ecuación (2) y sustituimos en la (3)

$$a_C = \frac{m_A g \ cos\alpha \ sen\alpha}{m_C + m_A sen^2\alpha} = \frac{12 * 9,8 * cos30 * sen30}{30 + 12 sen^2 30} = 1,54 \ \frac{m}{s^2}$$

De la ecuación (1)

$$a_{A/C} = g * sen\alpha + a_C cos\alpha = 9,8 * sen30 + 1,54 * cos30 = 6,23 \ \frac{m}{s^2}$$

Este problema también se puede resolver utilizando un sistema de referencia inercial ligado al suelo, *con lo que no es preciso introducir fuerzas de inercia*. En la figura 2 están representados las aceleraciones de la masa y de la cuña respecto del suelo y en la figura 1 están las fuerzas reales.

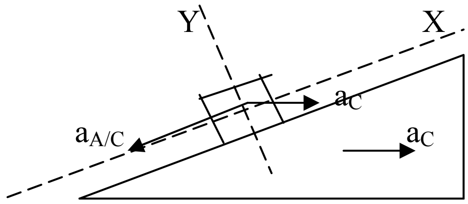


Fig. 2

Aplicamos la ley de Newton a la masa A y a la cuña C.

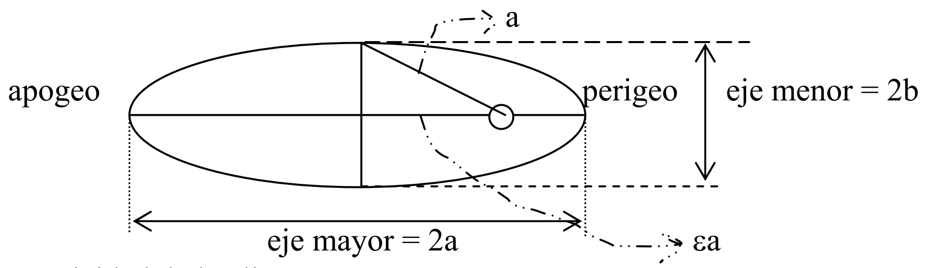
$$\text{ejeX}: m_A g \ \text{sen}\alpha = m_A a_{A/C} - m_A a_C \ \cos\alpha \ ; \text{ejeY}: N - m_A g \ \cos\alpha = -m_A a_C \ \text{sen}\alpha$$

$$N \ \text{sen}\alpha = m_C a_C$$

Estas ecuaciones coinciden con las anteriores.

23.- Un satélite de masa m describe una órbita elíptica alrededor de la Tierra. La mínima distancia del satélite al centro de la Tierra (perigeo) vale R_o y la velocidad es v_o. La longitud del eje mayor de la órbita es $4R_o$. Calcular a) la velocidad del satélite cuando se encuentre a la máxima distancia del centro de la Tierra (apogeo) en función de G ,M (masa de la Tierra) y R_o b) la longitud del eje menor de la órbita y el periodo del satélite en función de v_o y R_o. La energía del satélite en la órbita vale $E = -\frac{GMm}{2a}$, siendo 2a la longitud del semieje mayor.

Antes de resolver el problema recordemos algunas propiedades geométricas de la elipse



ε es la excentricidad de la elipse $2a = 4 R_o$

Fig.1

En nuestro problema la distancia del centro de la Tierra al satélite en el perigeo es R_o. La distancia del centro de la Tierra al satélite cuando está en el apogeo vale $2a-R_o = 3R_o$

a) El satélite está sometido a una fuerza central que pasa permanentemente por la Tierra, esto lleva aparejado la conservación del momento angular, por tanto, la velocidad v en el apogeo es :

$$mv_oR_o = mv3R_o \quad \Rightarrow \quad v = \frac{v_o}{3}$$

En el perigeo la energía del satélite es cinética y potencial, por tanto, se cumple

$$\frac{1}{2}mv_o^2 - \frac{GMm}{R_o} = -\frac{GMm}{2a} \Rightarrow \frac{1}{2}v_o^2 = GM\left(\frac{1}{R_o} - \frac{1}{4R_o}\right) \quad \Rightarrow v_o = \sqrt{\frac{3GM}{2R_o}} \quad (1)$$

El valor de la velocidad en el apogeo

$$v = \frac{v_o}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3GM}{2R_o}} = \sqrt{\frac{GM}{6R_o}}$$

b) De la figura 1 se deduce: $2\varepsilon\ a + 2R_o = 4R_o \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{2R_o}{2a} = \frac{1}{2}$

$$b^2 = a^2 + a^2\varepsilon^2 = a^2\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}a^2 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2}2R_0$$

La longitud del eje menor de la elipse es: $l = 2b = 2\sqrt{3}R_o$

Para calcular el periodo del planeta recurrimos a la tercera ley de Kepler

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{Cte}$$

Para calcular el valor de la constante imaginemos que la órbita es circular y de periodo T , igualamos la fuerza de atracción gravitatoria con la fuerza centrípeta

$$G\frac{Mm}{R^2} = \frac{mv^2}{R} = \frac{m\left(\frac{2\pi\ R}{T}\right)^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{Cte}$$

El valor de GM lo sacamos de la ecuación (1)

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \frac{4\pi^2 * 3}{2v_o^2R_o} \quad \Rightarrow \quad \frac{T^2}{8R_o^2} = \frac{4\pi^2 * 3}{2v_o^2R_o} \quad \Rightarrow \quad T = 4\sqrt{3}\pi\frac{R_o}{v_o}$$

24.- Desde un punto P de la superficie terrestre de latitud λ = 60º se lanza un proyectil paralelo a la superficie terrestre y apuntando hacia el este. El proyectil describe una orbita elíptica con un foco en la Tierra. Calcular la velocidad respecto del punto P de lanzamiento para que el proyectil coincida de nuevo con el punto P en el tiempo más corto posible. Se considera que no hay rozamientos y que el centro de la Tierra es un sistema inercial. La energía de una órbita elíptica es: $E = -G\frac{Mm}{2a}$, siendo M la masa de la Tierra y a, el eje mayor de la elipse.

Datos : G =6,67.10^{-11} Nm^2/kg^2; Masa de la Tierra. M = 5,98.10^{24} kg

Radio de la Tierra 6,36.10^6 m; Periodo de rotación terrestre T_T = 8,64.10^4 s

Una vez lanzado el proyectil este describe una órbita elíptica empleando un tiempo T. Para que el proyectil coincida de nuevo con el punto de salida P, la Tierra ha tenido que dar una vuelta completa, y en ello emplea un tiempo T_T. En este tiempo el proyectil ha podido dar varias vueltas en su órbita empleando en cada vuelta un tiempo T. Entre el periodo T y el periodo T_T existe una relación. Si el proyectil da una vuelta mientras que la Tierra gira 360º , entonces $T = T_T$, si el proyectil da dos vueltas : $T = T_T/2$, si da tres vuelta $T = T_T/3$, en general

$$T = \frac{T_T}{n}, \text{ siendo n un número entero.} \quad (1)$$

Designamos con V la velocidad de salida del proyectil respecto del centro de la Tierra Se cumple para la energía que Energía cinética + Energía potencial = Energía en la órbita elíptica

$$\frac{1}{2}mV^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2a} \quad \Rightarrow \quad V^2 = GM\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right)$$

Si aplicamos la tercera ley de Kepler

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

$$V^2 = \frac{2GM}{R} - \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}GM}{\sqrt[3]{GM}\ T^{\frac{2}{3}}} = \frac{2GM}{R} - \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}GM}{\sqrt[3]{GM} * T_T^{\frac{2}{3}}} n^{\frac{2}{3}}$$

$$V = \sqrt{1{,}254.10^8 - 0{,}0944.10^8.n^{\frac{2}{3}}} \quad (2)$$

Teniendo en cuenta que la orbita es elíptica se ha de cumplir que a>R, esto equivale a que el periodo T es superior a T_C, que es el periodo si la orbita fuese circular alrededor de la Tierra, o también a que la velocidad $V>V_C$

$$\frac{T_C^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow T_C = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 * \left(6{,}36.10^6\right)^3}{6{,}67.10^{-11} * 5{,}98.10^{24}}} = 5046 \text{ s}$$

$$V_C = \frac{2\pi\ R}{5046} = \frac{2\pi * 6{,}36.10^6}{5046} = 7919 \ \frac{m}{s}$$

Si en la ecuación (2) damos valores enteros a n encontramos que

Para n =16 , V = 8091 m/s ; para n =17, V=7937 m/s ; para n =18, V = 7782 m/s

El valor más pequeño de V que cumple con la condición de ser mayor que 7919 m/s se da cuando n = 17.

V es la velocidad de salida del proyectil respecto del centro de la Tierra , esta velocidad es la suma de dos velocidades, la velocidad v del proyectil respecto del punto P más la velocidad lineal del punto P debido a la rotación de la Tierra sobre su eje. Si miramos la Tierra desde el Polo Norte ésta gira en sentido contrario a las agujas de un reloj.

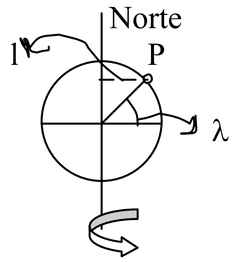


Fig. 1

Este movimiento visto desde el punto P es un giro de oeste a este de la Tierra (fig. 1) por esa razón se suman las velocidades

$$V = v + \omega l \Rightarrow v = V - \omega R\cos\lambda$$

Siendo R el radio de la Tierra, ω su velocidad angular y λ la latitud

$$v = 7{,}9.10^3 - \frac{2\pi}{24 * 3600} * 6{,}36.10^6 * \cos 60 = 7{,}7 \ \frac{km}{s}$$

25.- Un satélite describe una órbita circular de radio r_o. En un determinado momento los cohetes auxiliares del satélite aumentan repentinamente su energía cinética en un cincuenta por ciento. Calcular la máxima distancia que alcanza el satélite respecto del centro de la Tierra. Dato: Energía de una órbita elíptica $E = \frac{-GMm}{2a}$

Cuando un satélite gira en una órbita circular en torno a la Tierra, se cumple que la fuerza de atracción gravitatoria entre Tierra y satélite es, precisamente, la fuerza centrípeta que éste necesita para girar.

$$G\frac{Mm}{r_o^2} = \frac{mv^2}{r_o} \qquad \Rightarrow \qquad v^2 = G\frac{M}{r_o}$$

La nueva energía cinética del satélite después de actuar los cohetes es:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 + 0{,}5\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1{,}5}{2}m\frac{GM}{r_o}$$

Las trayectorias seguidas por el satélite antes y después de actuar los cohetes están reflejadas en la figura 1.

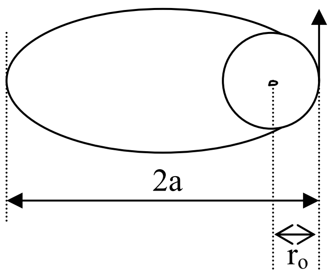


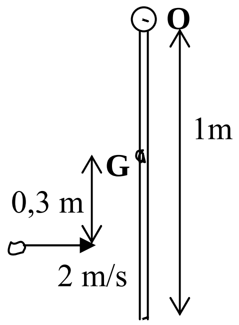
Fig.1

En el perigeo, la posición más cercana del satélite a la Tierra, se cumple que la suma de la energía cinética y potencial del satélite es igual a la energía total en la órbita

$$\frac{1,5}{2}m\frac{GM}{r_o}-G\frac{Mm}{r_o}=-G\frac{Mm}{2a} \quad \Rightarrow \quad \frac{0,5}{2r_o}=\frac{1}{2a} \quad \Rightarrow \quad a=2r_o$$

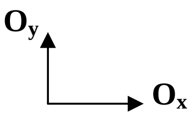
De la figura 1 se deduce que el apogeo del satélite, máxima distancia al centro de la Tierra, vale 3 r_o.

26.- Una varilla uniforme de masa M = 4 kg y longitud L = 1,0 m está pivotada en su extremo superior O. Una masa m = 0,2 kg, considerada como puntual, con velocidad horizontal de 2 m/s, golpea a la varilla en un lugar que dista 0,3 m del centro de masas de la misma y allí se incrusta en la varilla, tal como indica la figura inferior



a) Determinar la velocidad del centro de masas y la velocidad angular de la varilla después del impacto b) Calcular la fuerza de reacción en el pivote O si el choque duró 6 ms c) Determinar en qué lugar debe impactar la bola para que la reacción en el pivote fuese nula.

En el extremo de la varilla O aparece una fuerza de impacto cuyas componentes son O_x y O_y sobre unos ejes coordenados cartesianos



Se admite que durante el impacto la varilla no se mueve debido a que el tiempo del proceso es muy pequeño. Como consecuencia del mencionado impacto el centro de masa de la varilla adquiere una velocidad v_G y una rotación alrededor de O.

Podemos aplicar los teoremas de conservación de la cantidad de movimiento lineal

$$mv = Mv_G + m(v_G + \omega x) + \Delta p \quad \Rightarrow \quad 0,2*2 = 4v_G + 0,2(v_G + \omega * 0,3) + \Delta p \quad (1)$$

Δp representa el momento lineal de la fuerza impulsiva horizontal en O y vale $O_x*\Delta t$

Al no existir momento lineal sobre el eje Y resulta que $O_y = 0$

Aplicamos el teorema de la conservación del momento angular

$$mvx - \Delta p*\frac{L}{2} = m(v_G + \omega x)x + I\omega \Rightarrow 0,2*2*0,3 - \Delta p*0,5 = 0,2(v_G + \omega*0,3)*0,3 + I\omega$$

El momento de inercia de la varilla respecto de su centro de masa vale

$$I = \frac{1}{12}ML^2 = \frac{1}{12}*4*1^2 = \frac{1}{3} \ \ \text{kg.m}^2$$

Sustituyendo en la ecuación inmediata anterior

$$0{,}12 - \Delta p * 0{,}5 = 0{,}2v_G + 0{,}018\omega \ + \frac{1}{3}\omega \quad (2)$$

Tenemos dos ecuaciones (1) y (2) y tres incógnitas. La tercera ecuación la obtenemos porque el punto O no tiene velocidad

$$v_O = v_G - \omega\frac{L}{2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_G = 0{,}25\omega \ \ (3)$$

resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) , (2) y (3) resulta:

ω = 0,52 rad/s , La barra gira en sentido antihorario; v_G= 0,13 m/s

Δp= -0,18 kg.m.s^{-1}

El signo menos indica que **Ox** está dirigido hacia la izquierda y el valor de la fuerza es :

$$O_x = \frac{0{,}18}{6.10^{-3}} = 30 \ \ \text{N}$$

El planteamiento de las ecuaciones es el mismo salvo que ahora la incógnita h, es la distancia desde el impacto al centro de masas de la varilla

$$mv = Mv_G + m(v_G + \omega h) + \Delta p$$
$$mvh - \Delta p * \frac{L}{2} = m(v_G + \omega h)h + I\omega$$
$$\Delta p = 0$$

Multiplicamos la primera ecuación por h y le restamos la segunda

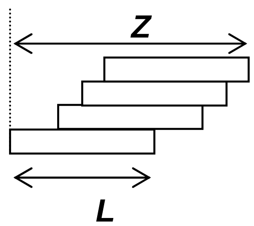
$$0 = Mv_G h - I\omega = M \ v_G h = \frac{1}{12}ML^2\omega \quad \Rightarrow \quad v_G = \frac{L^2\omega}{12h} \ \ (4)$$

Como el punto O no tiene velocidad $\quad v_O = v_G - \omega\frac{L}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_G = \omega\frac{L}{2} \ \ (5)$

De (4) y (5) $\qquad \omega\frac{L}{2} = \frac{L^2\omega}{12h} \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{L}{6}$

La distancia al punto O es: $\qquad H = \frac{L}{6} + \frac{L}{2} = \frac{2L}{3}$

27.- Se dispone de ladrillos en forma de paralelepípedo de longitud mayor L. Se colocan cuatro de ellos como indica la figura inferior



Calcular la máxima distancia, medida en horizontal, entre cada ladrillo y el que tiene debajo para que el sistema permanezca en equilibrio. Si en las condiciones anteriores se colocasen 10 ladrillos ¿cuál sería la distancia Z entre el inferior y el superior?

Si colocásemos solamente dos ladrillos el superior podría estar separado del inferior una distancia como máximo de L/2, que es justamente el límite para que el centro de masas

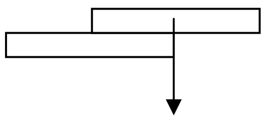


Fig 1

del ladrillo superior pasase por la base de sustentación del inferior (figura 1)

Si colocásemos tres ladrillos el superior podría estar como máximo a L/2 respecto del que tiene debajo, además el centro de masas de los dos ladrillos superiores tiene que pasar por la base de sustentación del inferior (fig. 2)

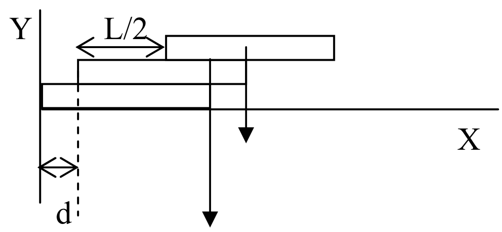


Fig.2

Respecto al sistema de referencia señalado en la figura 2 , el centro de gravedad del ladrillo superior tiene una abscisa L+d, el situado en el centro tiene una abscisa L/2+d. El centro de masas de estos dos ladrillos tiene de abscisa

$$x_{CM} = L = \frac{mg(L+d) + mg\left(\frac{L}{2}+d\right)}{2mg} \quad \Rightarrow \quad 2L = \frac{3}{2}L + 2d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{L}{4}$$

Si colocásemos cuatro ladrillos el superior (número 4) dista sobre el que tiene debajo (número 3) L/2 . El número (3) sobre el que tiene debajo (número 2) dista L/4, ya que
el centro de masas de 4 y 3 ha de pasar por la base de sustentación de (2) ver figura (2). El número (2) dista x respecto del inferior o base

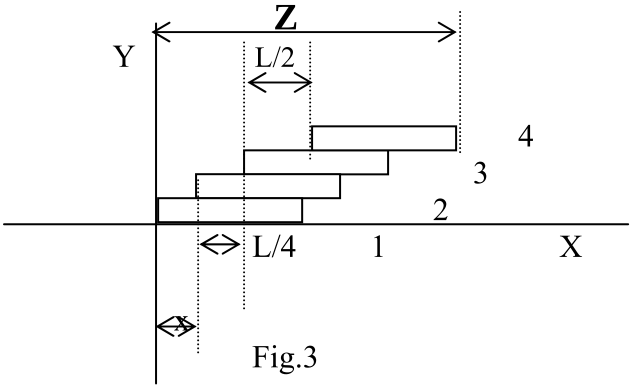


Fig.3

El centro de masas de los ladrillos 4, 3, y 2 tiene de abscisa L

$$x_{CM} = L = \frac{mg\left(L + \frac{L}{4} + x\right) + mg\left(\frac{L}{2} + \frac{L}{4} + d\right) + mg\left(\frac{L}{2} + x\right)}{3mg} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{L}{6}$$

El valor de Z en la figura 3 es : $Z = \frac{L}{2} + \frac{L}{4} + \frac{L}{6} = \frac{L}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$

Si se hubiesen colocado 10 ladrillos en total el valor de Z es:

$$Z = \frac{L}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{9}\right) = 1{,}41\ L$$