Problemas para preparar una olimpiada de Física

MECÁNICA II

9.- Existen algunos materiales para los que el coeficiente de rozamiento puede valer la unidad. ¿Cuál sería el ángulo máximo de un plano inclinado por el que pudiese rodar sin deslizar una esfera fabricados ambos con uno de estos materiales?

La condición de rodadura pura es que se cumpla la relación (1) $a = \alpha R$, siendo a la aceleración del centro de masas de la esfera, α la angular y R el radio de la esfera.
Las ecuaciones del movimiento para la traslación y rotación son las siguientes (fig. 1)

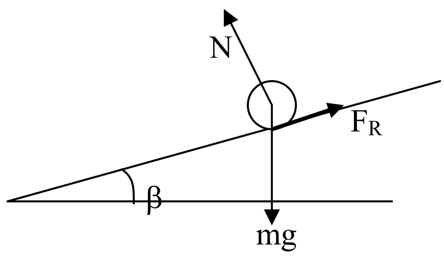


Fig. 1

$$mg\,sen\beta - F_R = ma \qquad ; \qquad F_R * R = I\alpha = \frac{2}{5}mR^2\alpha$$

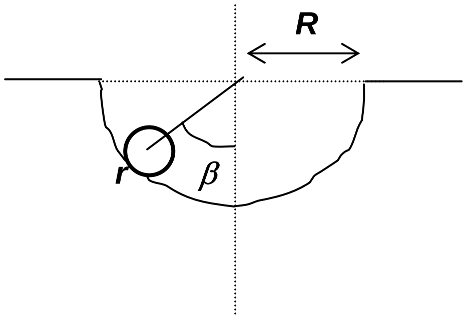
de la primera despejamos a y de la segunda α y lo llevamos a la relación (1)

$$g\,sen\beta - \frac{F_R}{m} = \frac{5F_R}{2m} \qquad \Rightarrow \qquad sen\beta = \frac{\frac{7}{2}F_R}{mg}$$

La fuerza de rozamiento vale como máximo $F_R = \mu mg\cos\beta$

$$sen\beta = \frac{7\mu\ mg\cos\beta}{2mg} \quad \Rightarrow \quad tag\beta = \frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad \beta = 74^o$$

10.- Un aro de masa m y radio r puede rodar por la superficie interna de un cilindro de radio R (ver la figura inferior)



Calcular el periodo de oscilación del aro para ángulos β pequeño

Sobre el aro actúan las fuerzas que se indican en la figura 1

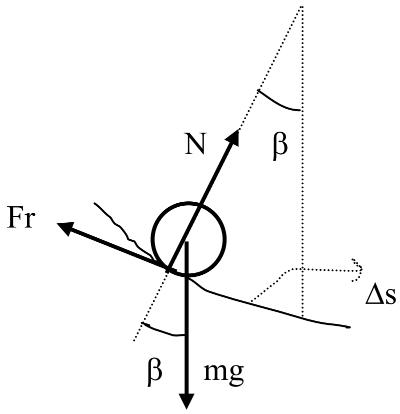


Fig. 1

las ecuaciones del movimiento de traslación y rotación son :

$$mg\,\mathrm{sen}\beta - F_R = ma \qquad ; \qquad F_R * r = I\alpha$$

$I = mr^2$, es el momento de inercia del aro respecto de su centro de masas. Si el aro rueda y no desliza existe una tercera ecuación: $a = \alpha\, r$. Combinado estas tres ecuaciones se llega a:

$$mg\,\mathrm{sen}\beta = \frac{Ia}{r^2} + ma \qquad \Rightarrow \qquad mg\,\mathrm{sen}\beta = 2ma$$

Para ángulos pequeños se puede sustituir el seno por su ángulo. Por otra parte el valor del arco que recorre el centro de masas del aro vale

$$\Delta s = \beta(R - r) \qquad ; \qquad a = \frac{g\beta}{2} = \frac{g\ \Delta s}{2(R - r)}$$

Al ser la aceleración directamente proporcional a la elongación (Δs) resulta que también lo es la fuerza, por tanto:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{m\dfrac{g}{2(R - r)}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2(R - r)}{g}}$$

11.- Estimar la presión en el centro de la Tierra, admitiendo que la densidad crece linealmente con la profundidad. Se admite que la densidad superficial es la mitad de la densidad media total de la Tierra.
Datos $g_S = 9{,}81$ N/kg y $G = 6{,}67.10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Designamos con ρ_o la densidad media total de la Tierra, con ρ_C su densidad en el centro y con ρ_S su densidad en la superficie.

Consideremos una capa esférica de radio x y espesor dx (fig.1) Su masa es el producto de su volumen por su densidad

$$dm = \delta V * \rho_X$$

en la anterior expresión ρ_X representa la densidad de la Tierra a una distancia x de su centro. Vamos a calcular el valor de esta densidad en función de la densidad media total de la Tierra

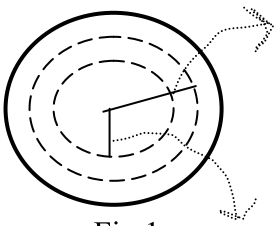


Fig.1

Según los datos del problema $\rho_S = \dfrac{\rho_O}{2}$ y además la variación de la densidad es lineal:

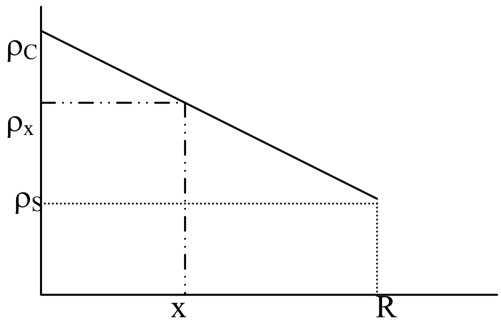


Fig. 2

De la figura 2 se deduce que : $\dfrac{\rho_C - \rho_S}{R} = \dfrac{\rho_x - \rho_S}{(R - x)} \quad \Rightarrow \quad \rho_x = \rho_C - \rho_C \dfrac{x}{R} + \rho_S \dfrac{x}{R}$ (1)

Para averiguar el valor de ρ_C en función de ρ_o tenemos en cuenta que la masa total de la Tierra es

$$M_T = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_o = \int_0^R 4\pi\ x^2 \rho_x dx = \int_0^R 4\pi\ \left(\rho_C - \rho_C \frac{x}{R} + \rho_S \frac{x}{R}\right) x^2 dx$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_o = 4\pi\ R^3 \left(\frac{\rho_C}{3} - \frac{\rho_C}{4} + \frac{\rho_S}{4}\right) \quad \Rightarrow \rho_C = 4\rho_o - 3\rho_S = 4\rho_o - \frac{3}{2}\rho_o \quad \Rightarrow \rho_C = \frac{5}{2}\rho_o$$

Si llevamos el valor de ρ_C a la ecuación (1) resulta:

$$\rho_x = \rho_o\left(\frac{5}{2}-\frac{2x}{R}\right) \quad (2)$$

Si volvemos a la figura (1), encontramos que la variación de presionen la capa esférica señalada es :

$$dp = \rho_x g_x dx \quad (3)$$

g_x representa la intensidad del campo gravitatorio a una distancia x del centro de la Tierra. El valor de g_x se calcula teniendo en cuenta que la intensidad del campo gravitatorio en el interior de la Tierra se debe a la masa que existe por debajo de ese lugar, en consecuencia:

$$g_x = G\frac{\int_0^x 4\pi\ x^2 g_x dx}{x^2} = G\frac{\int_0^x 4\pi\ x^2\left[\rho_o\left(\frac{5}{2}-\frac{2x}{R}\right)\right]dx}{x^2} = \frac{G4\pi\ \rho_o}{x^2}\left[\int_o^x\left(\frac{5}{2}-\frac{2x}{R}\right)x^2dx\right]$$

$$g_x = \frac{G4\pi\ \rho_o}{x^2}\left[\frac{5x^3}{6}-\frac{x^4}{2R}\right] \quad \Rightarrow \quad g_x = 4\pi\ \rho_o Gx\left(\frac{5}{6}-\frac{x}{2R}\right) \quad (4)$$

Llevamos las ecuaciones (2) y (4) a la (3) e integramos entre cero y el radio R de la Tierra.

$$p = \int_o^R \rho_o\left(\frac{5}{2}-\frac{2x}{R}\right)4\pi\ \rho_o Gx\left(\frac{5}{6}-\frac{x}{2R}\right)dx = 4\pi\ G\rho_o^2\int_o^R\left(\frac{5}{2}-\frac{2x}{R}\right)\left(\frac{5}{6}-\frac{x}{2R}\right)\ xdx$$

$$p = 4\pi\ G\rho_o^2\left[\int_0^R\frac{25}{12}xdx-\int_0^R\frac{5}{4}\frac{x^2}{R}dx-\int_0^R\frac{10}{6}\frac{x^2}{R}dx+\int_0^R\frac{x^3}{R^2}dx\right] = 4\pi\ G\rho_o^2R^2\,\frac{23}{72} \quad (5)$$

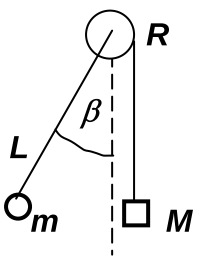
Ahora tenemos en cuenta el valor de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie terrestre

$$g_S = G\frac{M(\text{tierra})}{R^2} = G\frac{\frac{4}{3}\pi\ R^3\rho_o}{R^2} \quad \Rightarrow \quad \rho_o = \frac{3g_S}{4\pi\ GR} \quad (6)$$

Finalmente llevando la ecuación (6) a la (5) resulta para la presión en el centro de la Tierra:

$$p = \frac{23}{32\pi}\frac{g_S^2}{G} = \frac{23*9{,}81*9{,}81}{32\pi\ 6{,}67.10^{-11}} = 3{,}3.10^{11}\,\text{Pa}$$

12.-En el dispositivo de la figura inferior la polea de radio R y la varilla de longitud L carecen de masa.



La varilla es solidaria a la polea, esto es, al girar la polea un cierto ángulo la varilla gira el mismo ángulo. a) Calcular las condiciones para que se produzca un movimiento oscilatorio en el sistema. Se parte de una posición inicial de modo que la varilla forma un ángulo β=0
b) Para los valores M = 0,15 kg , R =0,2 m , m = 0,1 kg , L = 0,5 m , determinar para qué ángulos el movimiento oscilatorio puede asimilarse a uno armónico simple.

En primer lugar veamos cómo puede ocurrir un movimiento oscilatorio en el sistema: La masa M crea con respecto al centro de la polea un momento M_1 = MgR, el cual cualquiera que sea la posición de la varilla es constante. La masa m crea un momento opuesto al anterior M_2 = mg L sen β el cual es tanto mayor cuanto mayor es el ángulo beta. En consecuencia, al principio, cuando la varilla forme un ángulo nulo con la vertical, la masa M se desplaza hacia abajo y la masa m se eleva, hasta que llega un instante en el que el momento de m supera al de M y por tanto la varilla puede regresar a su posición de equilibrio. Intuitivamente se comprende que si el momento de M es muy grande (bien por serlo M o por serlo R) en comparación con el que crea m, el momento de m nunca puede igualar al de M y en este caso la varilla da vueltas.

Imaginemos que hemos partido de la posición inicial con β =0 y que la masa m en un instante determinado se mueve hacia la izquierda con una velocidad v, la masa M lo hace con una velocidad V y la posición de M respecto a la inicial es h

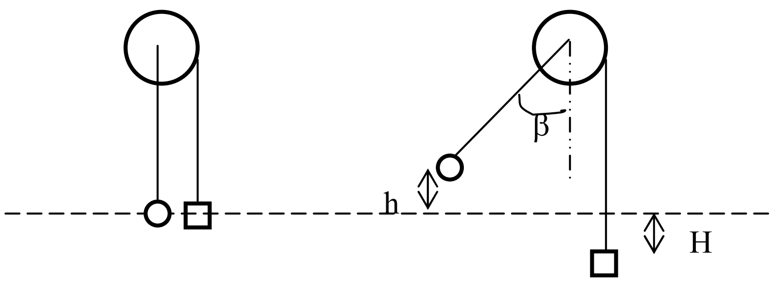


Fig. 1

La energía potencial perdida por M (Mgh) se emplea en potencial de m, en cinética de m y de M. El balance de energía nos da:

$$\mathrm{MgH} = \mathrm{mgh} + \frac{1}{2}\mathrm{mv}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{MV}^2 \qquad (1)$$

Como la polea ha girado un ángulo beta, teniendo en cuenta que el valor del arco es igual al valor del ángulo en radianes por el radio, resulta : $H = \beta\ R$.
Por otra parte resulta que : $h = L - L\cos\beta = L(1-\cos\beta)$ y que la velocidad lineal es igual a la angular por el radio: $v = \omega\ L$ y $V = \omega\ R$, siendo ω la velocidad de la polea en ese instante . Llevando estas ecuaciones a la (1) resulta:

$$Mg\beta\ R = mgL(1-\cos\beta) + \frac{1}{2}m\omega^2L^2 + \frac{1}{2}M\omega^2R^2$$

despejando la velocidad angular

$$\omega = \sqrt{\frac{Mg\beta\ R - mgL(1-\cos\beta)}{\frac{1}{2}\left(mL^2 + MR^2\right)}}$$

Para que haya movimiento oscilatorio es necesario que la velocidad angular se anule

$$Mg\beta\ R = mgL(1-\cos\beta\ ) \qquad \Rightarrow \qquad 1-\cos\beta = \frac{MR}{mL}\beta\ (1)$$

El cociente $\frac{MR}{mL}$ debe escogerse para satisfacer la ecuación (1). Representamos gráficamente 1-cos β frente a β y tres rectas en las que la pendiente varía

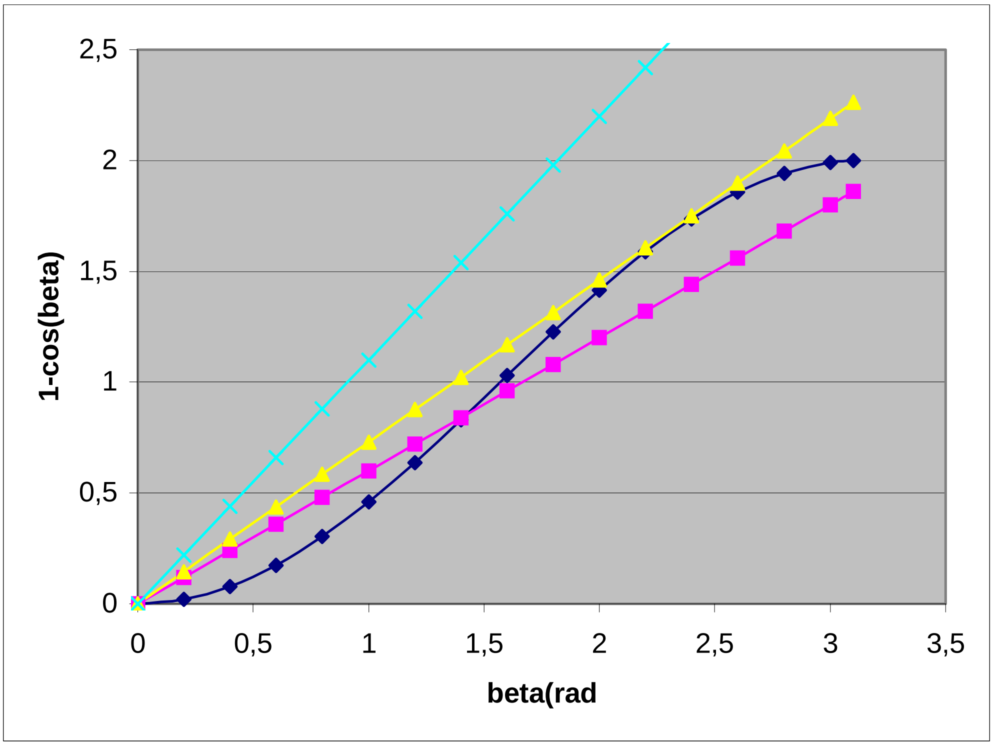


Fig. 2

En la gráfica de la fig.2 se han representado la función 1- cos β y tres rectas cuyas pendientes son respectivamente 0,60 , 0,73 y 1,1. Se deduce que cuando $\frac{MR}{mL} = 0{,}73$ la recta es tangente a la curva y para valores mayores no hay contacto entre recta y curva y por consiguiente no existe solución. En definitiva la condición para que exista movimiento periódico es que

$$\frac{MR}{mL} \leq 0{,}73$$

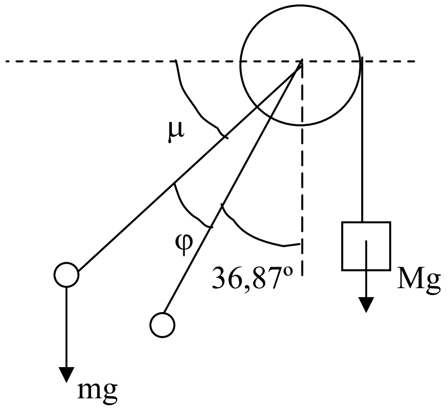
b) Comprobemos en primer lugar si los datos del problema cumplen la relación anterior

$$\frac{MR}{mL} = \frac{0{,}15 * 0{,}2}{0{,}1 * 0{,}5} = 0{,}6 < 0{,}73$$

Existe una posición de equilibrio donde los momentos de las fuerzas son iguales

$$MgR = mgL\,\text{sen}\delta \qquad \Rightarrow \qquad \text{sen}\delta = 0{,}6 \qquad \Rightarrow \qquad \delta = 36{,}87^{\circ}$$

Supongamos que separamos la masa m un ángulo mayor de 36,87º que designamos con φ, las ecuaciones del movimiento son:



$$mgL\cos\mu - MgR = mgL\mathrm{sen}(36{,}87+\varphi) - MgR = I\alpha = \left(MR^2 + mL^2\right)\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{mgL\mathrm{sen}(36{,}87+\varphi) - MgR}{\left(MR^2 + mL^2\right)}$$

Damos valores en la ecuación anterior, resulta $\alpha = 15{,}82\mathrm{sen}(36{,}87+\varphi) - 9{,}49$. Vamos a representar gráficamente la aceleración angular frente a φ.

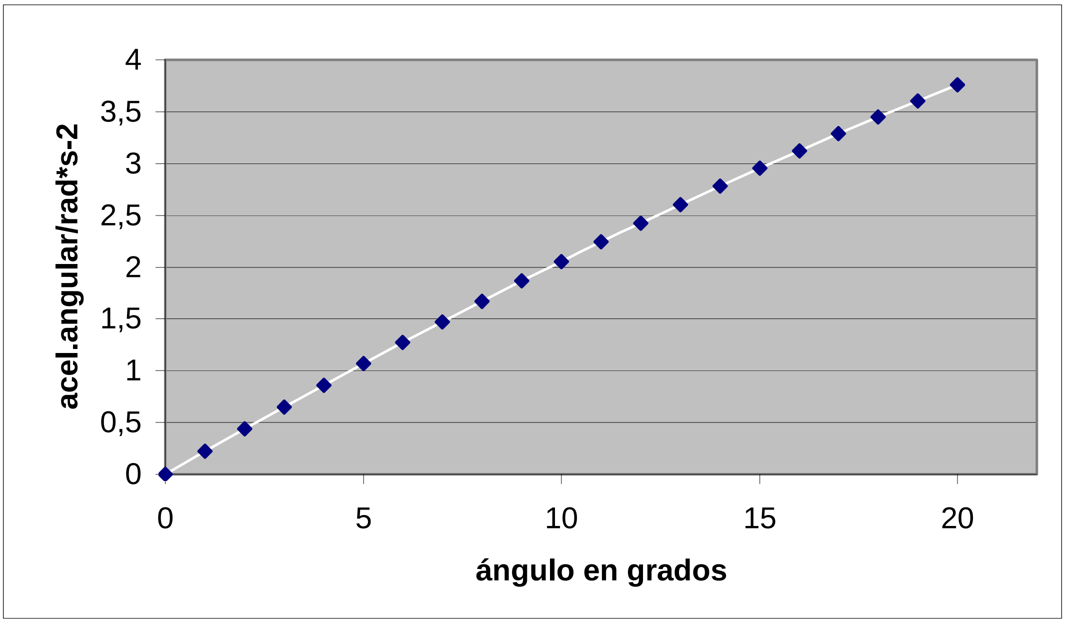


Fig. 3

De la gráfica de la figura 3 se deduce que para ángulo menores o iguales a 10º, respecto de la posición de equilibrio la aceleración angular α y el ángulo φ de separación son directamente proporcionales. Dibujamos de nuevo la gráfica hasta un ángulo de 10º

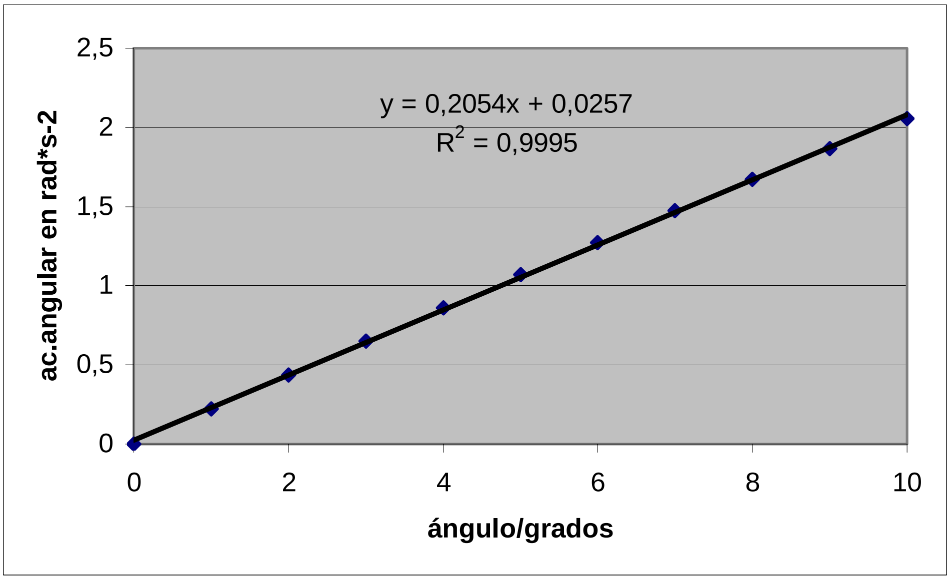


Fig.4

De la figura 4 se deduce que $\alpha = 0{,}21\ \varphi$.

El periodo del movimiento armónico lo podemos calcular teniendo en cuenta que :

M= Iα ; y en el caso de que M sea proporcional al ángulo de separación, resulta que $\alpha = \dfrac{K\varphi}{I}$ y el periodo del movimiento es : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{K}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{0{,}21}} = 13{,}7\ \text{s}$

13.- Una barra homogénea se encuentra apoyada en el suelo por un extremo y por el otro descansa sobre una pared vertical. Los coeficientes de rozamiento sobre el suelo y la pared vertical son m_1 y m_2 respectivamente. Determinar el mínimo ángulo que la barra puede formar con el suelo para que no resbale.

En la figura 1 se representan las fuerzas que actúan sobre la barra. L representa la longitud de la barra.

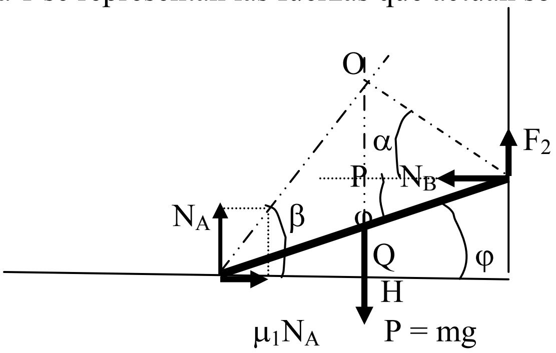


Fig. 1

En dicha figura φ representa el ángulo mínimo. Para dicho ángulo resulta que la fuerza de rozamiento contra el suelo debe ser la máxima posible para impedir que la barra resbale sobre éste. Si en estas condiciones la barra se encuentra en equilibrio los momentos de todas las fuerzas deben ser nulos. Si se

elige el punto O como centro de momentos esta condición se cumple pues todas las fuerzas son concurrentes en O.
De la figura 1 se deduce:

$$\tan\beta = \frac{N_A}{\mu_1 N_A} = \frac{1}{\mu_1} = \frac{OH}{\frac{L}{2}\cos\varphi} \qquad (1)$$

$$\tan\alpha = \frac{F_2}{N_B} = \mu_2 = \frac{OP}{\frac{L}{2}\cos\varphi} \quad ; \quad PQ = \frac{L}{2}\operatorname{sen}\varphi \quad ; \quad QH = \frac{L}{2}\operatorname{sen}\varphi$$

$$OH = OP + PQ + QH \Rightarrow \frac{L}{2}\frac{\cos\varphi}{\mu_1} = \frac{L}{2}\mu_2\cos\varphi + \frac{L}{2}\operatorname{sen}\varphi + \frac{L}{2}\operatorname{sen}\varphi$$

$$\cos\varphi\left(\frac{1}{\mu_1} - \mu_2\right) = 2\ \operatorname{sen}\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \tan\varphi = \frac{1-\mu_1\ \mu_2}{2\mu_1}$$

14.- La velocidad de escape desde la superficie de la Tierra es $v_e = \sqrt{2gR} = 11{,}2\ \frac{km}{s}$***, donde R es el radio de la Tierra y g la intensidad del campo gravitatorio en la superficie terrestre. ¿Qué velocidad adicional hay que comunicar en el centro de la Tierra a un cohete que efectúa una caída libre, sin velocidad inicial, a través de un túnel que atraviesa la Tierra de lado a lado por su centro?***

En primer lugar calculamos la velocidad con que llega el cohete al centro de la Tierra. La fuerza que actúa sobre el cohete es variable a medida que penetra en el túnel ya que la atracción terrestre solamente la ejerce la masa terrestre que está por debajo de él.

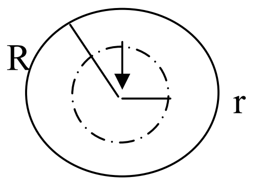


Fig. 1

Cuando el cohete está a una distancia r del centro de la Tierra sufre una fuerza debida a la masa que tiene por debajo, esta fuerza está dirigida hacia el centro de la Tierra.
M representa la masa total de la Tierra, M_r la masa de la esfera terrestre de radio r y ρ la densidad del material terrestre que suponemos constante.

$$M = \frac{4}{3}\pi\ R^3\rho \quad ; \quad M_r = \frac{4}{3}\pi\ r^3\rho \qquad \Rightarrow \qquad \frac{M_r}{M} = \frac{r^3}{R^3} \qquad (1)$$

La fuerza que sufre el cohete de masa m es:

$$\mathbf{F} = -G\frac{M_r m}{r^2}\mathbf{u}$$

siendo **u** el vector unitario en la dirección desde el centro de la Tierra a la superficie. Teniendo en cuenta la relación entre el la fuerza y la energía potencial en los campos conservativos y la relación (1), podemos escribir:

$$F = -G\frac{M_r m}{r^2} = -G\frac{Mr^3}{R^3 r^2}m = -\frac{dE_p}{dr} \quad \Rightarrow \quad E_p = \frac{GM\ m}{R^3}\int r\,dr = \frac{GM\ mr^2}{2R^3} + \text{constante}$$

Tomamos como referencia para medir la energía potencial su valor en la superficie terrestre igual a cero, luego la constante es cero. Además recordamos que la intensidad del campo gravitatorio en la superficie terrestre vale

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

que llevado a la expresión de la energía potencial conduce a

$$E_p = \frac{mgr^2}{2R}$$

Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica entre la superficie terrestre y el centro de la Tierra

o

$$E_p(\text{superficie}) + E_c(\text{superficie}) = E_p(\text{centro}) + E_c(\text{centro}) \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{mgR^2}{2R} + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_c^2 \qquad \Rightarrow \qquad v_c = \sqrt{gR}$$

Cuando el cohete alcance de nuevo la superficie terrestre debe llevar la velocidad de escape, si Δv es la velocidad que hay que añadir en el centro de la Tierra

$$\frac{1}{2}m(v_c + \Delta v)^2 + 0 = \frac{1}{2}m\ v_e^2 + mg\frac{R}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{gR} + \Delta v = \sqrt{3gR} \quad \Rightarrow$$

$$\Delta v = \sqrt{gR}\left(\sqrt{3} - 1\right) = \sqrt{2gR}\,\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = 5{,}8\ \frac{km}{s}$$

15.- Un vagón desliza por una vía horizontal con aceleración constante a = 3m.s^{-2}. De su techo cuelga un péndulo simple de longitud L =1 m. a) Calcular el ángulo que forma la dirección de la cuerda del péndulo con la vertical cuando se encuentre en equilibrio b) Si el péndulo se deja en libertad desde la posición vertical, sin velocidad inicial, determinar el ángulo que forma con dicha vertical cuando su velocidad se haga de nuevo y en un instante cero c) Hallar la variación de la velocidad del péndulo en la anterior situación y representarla gráficamente. g = 9,81 m.s^{-2}

a) En la figura 1 están representadas las fuerzas que actúan sobre la masa del péndulo cuando está en equilibrio. Se analiza el problema desde un sistema no inercial ligado al vagón, por ello aparece una fuerza de inercia de sentido contrario a la aceleración

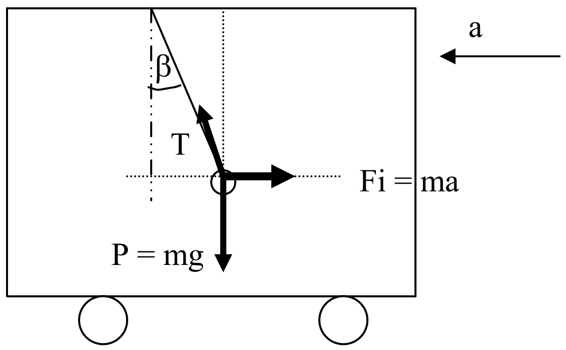


Fig. 1

T tensión de la cuerda, Fi fuerza de inercia y P peso de la bola del péndulo. Descomponiendo las fuerzas sobre los ejes y teniendo en cuenta que para el sistema ligado al vagón la bola se encuentra en equilibrio

$$\mathrm{Tsen}\beta = \mathrm{Fi} = \mathrm{ma} \quad ; \quad \mathrm{Tcos}\beta = \mathrm{mg} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tag}\beta = \frac{a}{g} = \frac{3}{9{,}81} \quad \Rightarrow \quad \beta = 17^{\circ}$$

b) Cuando la bola se suelta desde de la posición vertical comienza a ascender y en un determinado instante de ese ascenso actúan sobre ella las fuerzas que se indican en la figura 2.

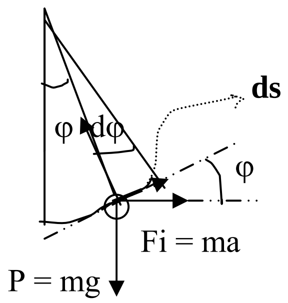


Fig. 2

La tensión T de la cuerda no ejerce trabajo por ser perpendicular al desplazamiento. El trabajo de las otras dos fuerzas es:

$$W_{Fi} = \int_0^{\gamma} F_i \; ds \; \cos\varphi = \int_0^{\gamma} F_i \; Ld\varphi \; \cos\varphi = F_i \; L \; \mathrm{sen}\gamma$$

$$W_P = -\int_0^{\gamma} P \; ds \; \mathrm{sen}\varphi = -\int_0^{\gamma} mg \; Ld\varphi \; \mathrm{sen}\varphi = -\, mg \; L \; \left[-\cos\varphi\right]_0^{\gamma} = mg \; L(\cos\gamma - 1)$$

La suma de esos trabajos es igual a la variación de energía cinética

$$\Delta E_c = 0 = F_i\ L\ \text{sen}\gamma + mgL\cos\gamma - mgL = maL\ \text{sen}\gamma + mgL\cos\gamma - mgL$$

$$g\cos\gamma - gL = a\,\text{sen}\gamma \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{g}{a}\cos\gamma - \frac{gL}{a}\right)^2 = \text{sen}^2\gamma \;\; = 1 - \cos^2\gamma \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{g^2}{a^2} + 1\right)\cos^2\gamma - \frac{2g^2}{a^2}\cos\gamma + \left(\frac{g^2}{a^2} - 1\right) = 0$$

Se resuelve la ecuación de segundo grado

$$\cos\gamma = \frac{\dfrac{2g^2}{a^2} \pm \sqrt{\dfrac{4g^4}{a^4} - 4\left(\dfrac{g^4}{a^4} - 1\right)}}{2\left(\dfrac{g^2}{a^2} + 1\right)} \quad \Rightarrow \quad \cos\gamma = \frac{g^2 - a^2}{g^2 + a^2} = \frac{9{,}81^2 - 3^2}{9{,}81^2 + 3^2} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 34^{\text{o}}$$

La otra solución de la ecuación es $\gamma = 0$.

Si volvemos a la figura 2 la fuerza resultante que actúa sobre la bola es:

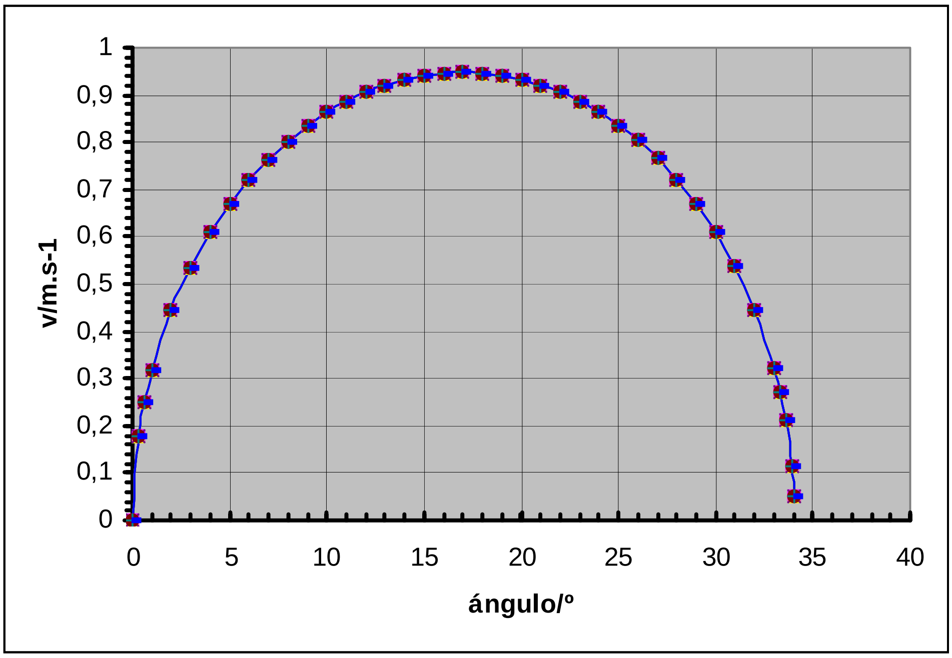
$$ma\cos\varphi - mg\,\text{sen}\varphi = ma_t \;\; ; \;\; a_t = \alpha L = \frac{d\omega}{dt}L = \frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}L = L\omega\frac{d\omega}{d\varphi} \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^{\omega} L\omega\ d\omega = \int_0^{\varphi}(a\cos\varphi - g\,\text{sen}\varphi)d\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{L\omega^2}{2} = a\,\text{sen}\varphi - g(\cos\varphi - 1)$$

En la expresión anterior el ángulo φ toma los valores comprendidos entre cero y 34º. Por otra parte se cumple que $v = \omega L$, siendo v la velocidad lineal de la bola del péndulo
Finalmente y teniendo en cuenta que L = 1 m, resulta:

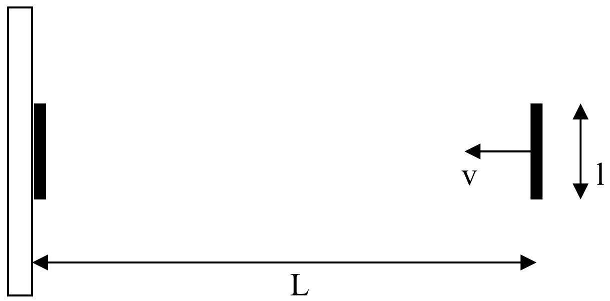
$$v = \sqrt{2\ [a\,\text{sen}\varphi - g(\cos\varphi - 1)]}$$

La representación gráfica de la función anterior se hace dándole valores al ángulo y representando v frente a φ.



La gráfica nos dice que la velocidad máxima ocurre para 17º. El movimiento es oscilatorio alrededor de la dirección que forma un ángulo de 17º con la vertical.

16.- Una varilla de longitud l = 10 cm desliza por un suelo sin rozamiento con una velocidad constante v = 10 cm/s , al mismo tiempo la varilla gira con una velocidad angular ω. La varilla en la posición inicial se encuentra a L = 50 cm de una pared y en posición paralela a ella . Si la varilla choca contra la pared en la forma que indica la figura, determinar ¿Cuál es el valor de la velocidad angular?

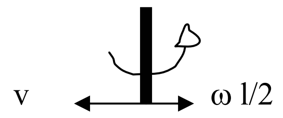


Cuando la varilla recorra la distancia L y al mismo tiempo haya girado 180 º se producirá un choque tal como indica la figura. También ocurrirá cuando la varilla gire un ángulo de 360º , de 360 + 180º , etc. En general $n\pi$ siendo n = 1, 2, 3 ......

Teniendo en cuenta que la varilla debe recorrer la distancia L = 50 cm en t = 50 cm/ 10 $cm.s^{-1}$ = 5 s , las velocidades angulares posibles de la varilla son:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{n\pi}{5} \text{ rad/s}$$

Si n es grande la velocidad de rotación de la varilla es muy grande y puede ocurrir que haya puntos de la misma que se muevan con una velocidad tal que hagan retroceder a la varilla , por ejemplo, consideremos el extremo inferior de la varilla. La velocidad lineal de dicho punto es la diferencia entre la velocidad de traslación v = 10 cm/s y la velocidad lineal debido a la rotación de valor ω l/2



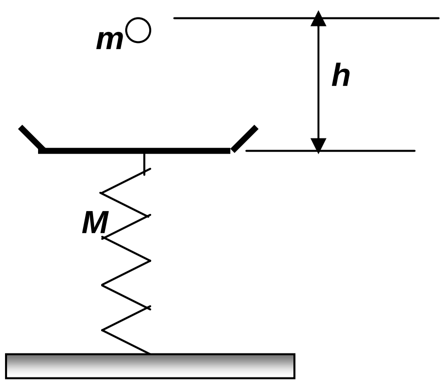
De la figura se deduce que ω l/2 no puede ser mayor que v = 10 cm/s y eso limita los valores de la velocidad angular:

$\omega_1 = \pi/5 = 0{,}63$ rad /s ; $\omega\, l/2 = 0{,}63 * (10/2) = 3{,}2$ cm/s < 10 cm/s

$\omega_2 = 2\pi/5 = 1{,}26$ rad /s ; $\omega\, l/2 = 1{,}26 * (10/2) = 6{,}3$ cm/s < 10 cm/s

$\omega_3 = 3\pi/5 = 1{,}89$ rad /s ; $\omega\, l/2 = 1{,}89 * (10/2) = 9{,}5$ cm/s < 10 cm/s

17.- Una bola de masa m cae desde una altura h, sobre el platillo de una balanza de resorte, de masa M. El choque se considera totalmente elástico. El impacto hace que el platillo oscile armónicamente con una amplitud de h/4. Cuando la bola cae de nuevo sobre el platillo, rebota y alcanza la altura h de la que partió inicialmente. Calcular la relación m/M.



Designamos con $v_i = \sqrt{2gh}$, la velocidad con que la masa m alcanza al platillo M, con v_1 a la velocidad con que rebota dicha masa y V_1 la velocidad que adquiere el platillo de masa M hacia abajo. Teniendo en cuenta que el choque es totalmente elástico se conserva la cantidad de movimiento y la energía cinética

$$mv_i = -mv_1 + MV_1 \quad (1) \qquad ; \qquad \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}MV_1^2 \quad (2)$$

La bola de masa m rebota con una velocidad v_1, sube una cierta altura s y cae de nuevo sobre el platillo. En este recorrido emplea un tiempo:

$$s = v_1 t - 1/2\, gt^2 \quad \text{, cuando cae de nuevo: } s = 0 \text{ y } t = 2v_1/g$$

Al caer de nuevo sobre el platillo la posición de éste debe ser la inicial, con una velocidad hacia arriba de V_1, para que en el nuevo choque consiga dar a la bola una velocidad v_i, para que ésta pueda alcanzar la altura h.
Durante el tiempo de rebote del choque primero y la caída de la bola de nuevo sobre el platillo, esto es, durante el tiempo $t = 2v_1/g$, la masa M efectúa un movimiento armónico y habrá efectuado una bajada y una subida hasta la posición inicial, esto es, habrá tardado un tiempo T/2, siendo T el periodo del movimiento armónico. Puede ocurrir que la masa M haya efectuado un periodo completo + medio periodo, o dos periodos completos + medio periodo, etc.

En general : $(2n + 1) T/2 = 2v_1/g$, siendo n = 0 , 1 ,2 ..... (3)

El periodo del movimiento armónico es: $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$, siendo k la constante elástica del muelle. Por otra parte se cumple que la energía cinética inicial de la masa M se emplea en comprimir el muelle hasta un máximo de h/4, según el principio de conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}MV_1^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{h}{4}\right)^2; \qquad k = \frac{16MV_1^2}{h^2}$$, llevando este valor a la ecuación del

periodo resulta:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{Mh^2}{16MV_1^2}} = \frac{\pi h}{2V_1} \quad (4)$$

El valor del periodo se lleva a la ecuación (3)

$$(2n+1)\frac{\pi h}{4V_1} = \frac{2v_1}{g} \quad ; \qquad (2n+1)\frac{\pi hg}{8} = v_1 V_1 \quad (5)$$

En la ecuación (5) debemos sustituir los valores de las velocidades deducidos de las ecuaciones (1) y (2). Dividiendo (1) entre (2) resulta:

$$\frac{m(v_i + v_1)}{m(v_i + v_1)(v_i - v_1)} = \frac{1}{V_1}; \quad \text{despejando} \quad v_1 = v_i - V_1 \ (6) \quad \text{y} \quad V_1 = v_i - v_1 \quad (7)$$

Si llevamos (6) a la ecuación (1) y operamos resulta: $$v_1 = v_i\frac{M-m}{M+m} \quad (8)$$

Si llevamos (7) a la ecuación (1) y operamos resulta: $$V_1 = \frac{2mv_i}{M+m} \quad (9)$$

Los valores (8) y (9) se introducen en la ecuación (5)

$$(2n+1)\frac{\pi hg}{8} = v_1 V_1 = \frac{2mv_i^2}{M+m}\,\frac{M-m}{M+m} = \frac{2m(M-m)2gh}{(M+m)^2};(2n+1)\frac{\pi}{8} = \frac{4m(M-m)}{(M+m)^2} \quad (10)$$

Si en la ecuación anterior damos a n el valor cero:

$$\frac{\pi}{32} = \frac{m(M-m)}{(M+m)^2} = \frac{\frac{M}{m}-1}{\left(\frac{M}{m}+1\right)^2}$$

Para resolver la ecuación anterior hacemos a = M/m y después de operar queda la ecuación de segundo grado 0,098 a^2 –0,804 a + 1,098 = 0. Las soluciones de dicha ecuación son : a_1 = 1,73 y a_2 = 6,47 y de aquí :

$$\frac{m}{M} = 0{,}578 \qquad y \qquad \frac{m}{M} = 0{,}155$$

Si en la ecuación (10) se da el valor n =1, la ecuación no tiene soluciones reales.