Mecánica I

1.- Un coche que se desplaza a v_o = 90 km/h comienza a frenar con movimiento uniformemente retardado hasta alcanzar una cierta velocidad mínima (v_m) luego comienza a acelerar con movimiento uniformemente acelerado hasta alcanzar de nuevo la velocidad de 90 km/h. En realizar esta maniobra emplea un tiempo de un minuto y recorre una distancia de 1 km ¿Cuál es la velocidad mínima del coche?

Este es uno de los problemas de cinemática que es más sencillo resolverlo gráficamente que analíticamente

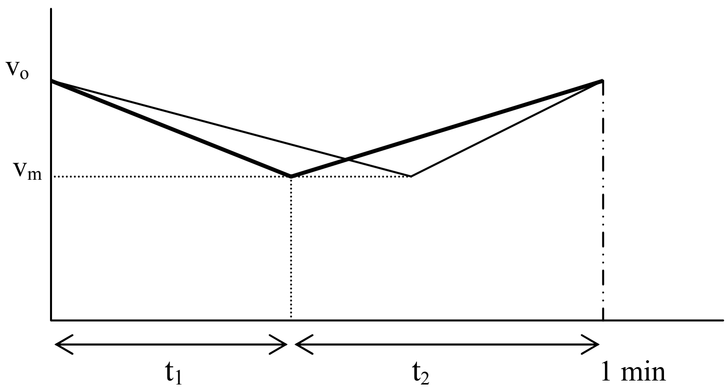


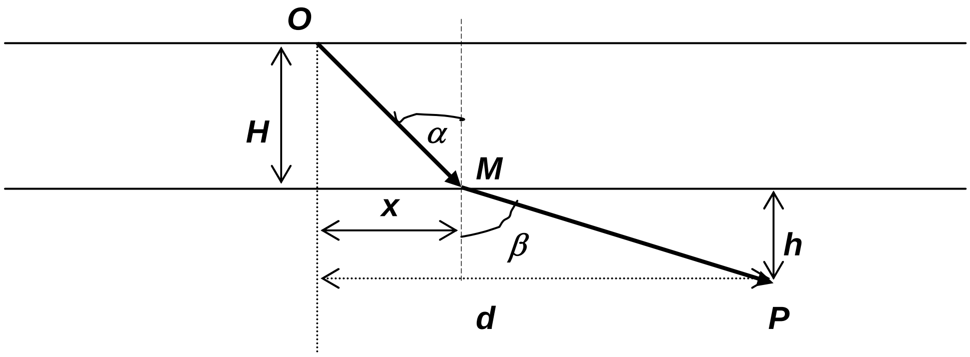
Fig. 1

El valor numérico del área de los dos trapecios vale 1 km

$$1 = \frac{v_o + v_m}{2} t_1 + \frac{v_o + v_m}{2} t_2 = \left(\frac{v_o + v_m}{2} \right) (t_1 + t_2) \quad \Rightarrow$$

$$v_m = \left(\frac{2}{t_1 + t_2} \right) - v_o = \left(\frac{2}{\frac{1}{60}} \right) - 90 = 30 \ \frac{km}{h}$$

2.- Una persona se encuentras en el punto O de la orilla de un estanque. ha de llegar al P viajando en una barca a través del estanque con velocidad constante V y luego en la otra orilla con velocidad constante v



Dicha persona puede elegir distintos caminos, en la figura está uno de los posibles. Encontrar aquél para el que el tiempo de viaje resulte el mínimo posible.

En la figura x es una variable así como los ángulos α y β. Para recorrer el camino sobre el agua OM, emplea un tiempo t_1 y para recorrer sobre tierra el camino MP un tiempo t_2. El tiempo total $t = t_1 + t_2$ debe ser mínimo.

$$t = \frac{OM}{V} + \frac{MP}{v} = \frac{\sqrt{H^2 + x^2}}{V} + \frac{\sqrt{h^2 + (d - x)^2}}{v}$$

para hallar el mínimo derivamos la función t(x) frente a x

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{V}\frac{2x}{2\sqrt{H^2 + x^2}} - \frac{1}{v}\frac{2(d - x)}{2\sqrt{h^2 + (d - x)^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{V}\frac{x}{\sqrt{H^2 + x^2}} = \frac{1}{v}\frac{(d - x)}{\sqrt{h^2 + (d - x)^2}}$$

De la figura se deduce que:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{V} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{v}$$

3.- En un determinado instante las coordenadas de posición de dos barcos A y B respecto del puerto son A (-10 km; 20 km) , B(-50 km ; 40 km). A navega con velocidad constante de v_A=
40 km/h y rumbo –30º norte y B con una velocidad de v_B= 20 km/h y rumbo +30º norte. Calcular: a) la velocidad relativa del barco B con respecto del A, b) la distancia mínima a la que encuentran dichos barcos y el tiempo que transcurre cuando la distancia es mínima, c) La velocidad del barco A, con el rumbo anterior, para que colisionase con el B y el tiempo en que se produciría la colisión

a) Desde el punto de vista de un observador situado en el puerto los dos barcos se mueven con respecto de él mientras que el agua permanece en reposo. Desde el punto

de vista de un observador situado en el barco A, éste se encuentra en reposo y el agua se desplaza con una velocidad $-v_A$. Para este observador el barco B se mueve con una velocidad relativa que es la suma vectorial de $-v_A$ y de la velocidad del barcoB respecto del puerto.

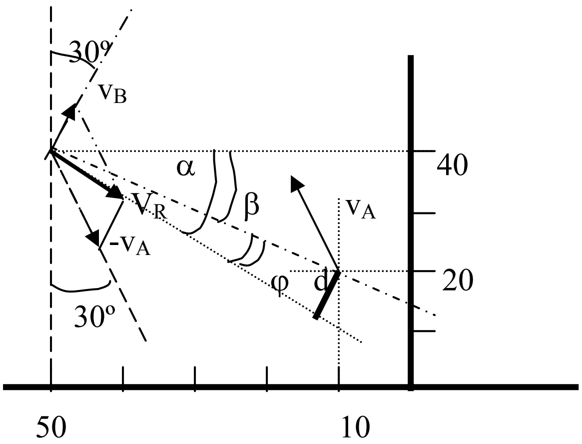


Fig. 1

En la figura 1 , V_R es la velocidad relativa del barco B respecto del A.

De la figura se deduce :

$$V_R = \sqrt{v_A^2 + v_B^2 + 2v_A v_B \cos 120} = 20\sqrt{3}\ \frac{km}{h}$$

b) De la fig. 1 se puede calcular los siguientes ángulos

$$\text{tag}\beta = \frac{40-20}{50-10} \quad \Rightarrow \quad \beta = 26{,}57^{\circ}$$

$$V_R \cos\alpha = v_B \cos\ 60 + v_A \cos\ 60 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{60\cos 60}{20\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 30^{\circ}$$

$$\varphi = \alpha - \beta = 3{,}43^{\circ}$$

La distancia mínima d es la perpendicular trazada a la recta que contiene el vector V_R

$$\text{sen}\varphi = \frac{d}{\sqrt{(50-10)^2 + 20^2}} \quad \Rightarrow \quad d = 44{,}72 * \text{sen}\ 3{,}43 = 2{,}7\ \ \text{km}$$

El tiempo que transcurre para que los barcos estén a la distancia d, se calcula observando la figura 1. El camino recorrido por el barco B, observado por el barco A ,es e = 44,72*cos 3,43 = 44,64 km con una velocidad V_R

$$t = \frac{e}{V_R} = \frac{44{,}64}{20\sqrt{3}} = 1{,}29 \ \text{horas}$$

Otra forma de calcular la distancia d es imaginar que en el barco A existen unos ejes de coordenadas y respecto de ellos, las ecuaciones paramétricas de las posiciones del barco B son.

$$x_B = -40 + 20\sqrt{3}\ \cos 30\ t = -40 + 30t \quad , \quad y_B = 20 - 20\sqrt{3}\ \text{sen}\ 30t = 20 - 17{,}32t$$

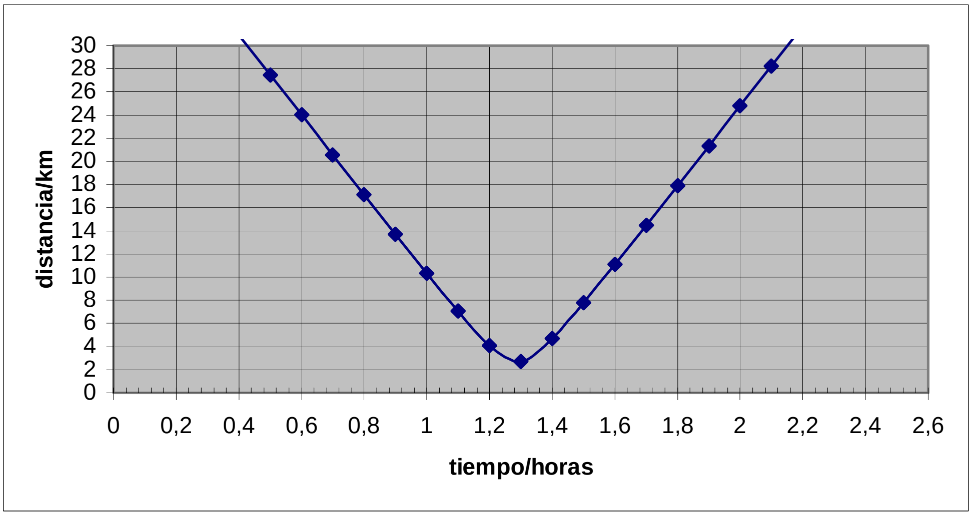
La distancia del barco B respecto del observador en el barco A es :

$$D = \sqrt{(-40+30t)^2 + (20-17{,}32t)^2} \quad (1)$$

Como nos piden la distancia mínima derivamos con respecto a la variable t e igualamos a cero

$$\frac{dD}{dt} = \frac{2(-40+30t)*30 + 2(20-17{,}32t)*(-17{,}32)}{2\sqrt{(-40+30t)^2 + (20-17{,}32t)^2}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = 1{,}29 \quad \text{horas}$$

La representación de la expresión (1) frente a la variable t tiene un mínimo



Para que los barcos colisiones la recta que contiene la velocidad relativa V_{RR} tiene que pasar por el lugar donde está el barco A, esto significa que en la figura 1 esa recta forma un ángulo b = 26,57 º y el valor de la nueva velocidad relativa se calcula siguiendo la figura 2.

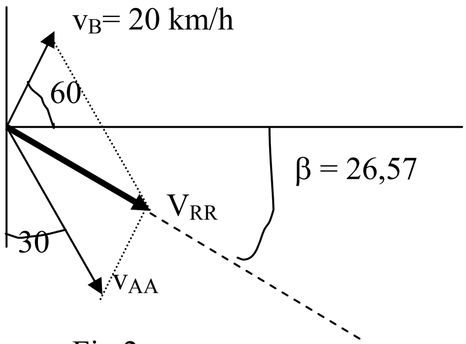


Fig.2

$$V_{RR}\cos 26{,}57 = 20\cos 60 + v_{AA}\cos 60 \quad ; \quad -V_{RR}\,\text{sen}26{,}57 = 20\cos 30 - v_{AA}\cos 30$$

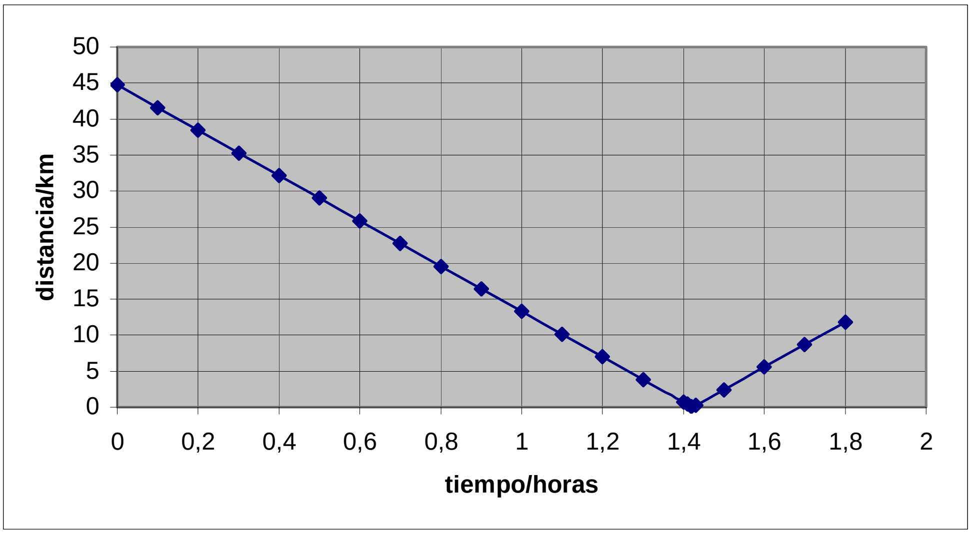
De ambas ecuaciones resulta: v_{AA} = 36,23 km/h , V_{RR} = 31,43 km/h y el tiempo dela colisión $t_N = \dfrac{44{,}72}{31{,}43} = 1{,}42$ horas.

Las ecuaciones paramétricas de B ahora son

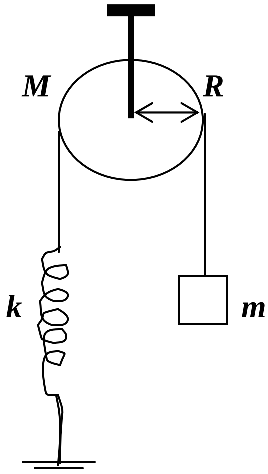
$x_B = -40 + 31{,}43\ \cos 26{,}57\ t = -40 + 28{,}11\ t \quad , y_B = 20 - 31{,}43\ \text{sen}\ 26{,}57t = 20 - 14{,}06\ t$ La distancia respecto del barco A es ahora.

$$D_N = \sqrt{(-40 + 28{,}11\ t)^2 + (20 - 14{,}06t)^2} \quad (2)$$

y la representación de D_N frente al tiempo



4.-En el dispositivo de la figura inferior la masa de la polea homogénea es M y su radio R



La constante elástica del muelle es k y la masa colgante vale m. Se supone que la cuerda carece de masa y que ésta no desliza sobre la polea. Determinar el periodo de las oscilaciones cuando la masa m se separa de la posición de equilibrio.

El muelle tiene una longitud propia al ponerlo en posición vertical y no colgarle ningún peso. Si luego colgamos la masa m el muelle se estira una longitud que denominamos x_o y el sistema está en equilibrio, cumpliéndose que los momentos de las fuerzas que actúan a ambos lados de la polea son iguales y de sentido contrario

$$kx_oR = mgR \qquad \Rightarrow \qquad kx_o = mg \ \ (1)$$

Si ahora bajamos de la posición de equilibrio a la masa m y dejamos al sistema en libertad, éste efectúa un movimiento vibratorio armónico. Por el lado izquierdo la cuerda tira de la polea con una fuerza que es proporcional a la elongación del muelle y que llamamos T_1

$$T_1 = k(x_o + x)$$

Por el lado derecho la cuerda tira de la polea con una fuerza T_2. Aplicamos las ecuaciones de la Dinámica a la polea y a la masa m teniendo en cuenta que x representa la elongación respecto de la posición x_o que la masa m está ascendiendo y que la polea en ese instante se mueve en sentido contrario a las agujas del reloj

$$(T_1 - T_2)R = I\alpha = \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R} \qquad \Rightarrow \qquad k(x_o + x) - T_2 = \frac{1}{2}Ma \ \ (2)$$

$$T_2 - mg = ma \ \ (3)$$

Combinando las ecuaciones (1), (2) y (3) resulta:

7

$$mg + kx - mg - ma = \frac{1}{2}Ma \qquad \Rightarrow \qquad kx = a\left(m + \frac{1}{2}M\right)$$

La última ecuación nos dice que la aceleración es proporcional a la elongación, por tanto el periodo es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{1}{2}M}{k}} \quad (4)$$

El problema puede resolverse a partir de la siguiente analogía, si la polea careciese de masa el periodo de oscilación sería

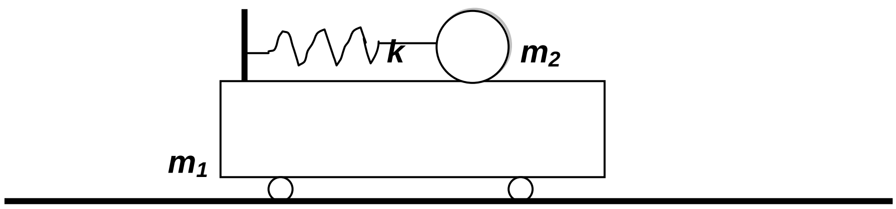
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (5)$$

Como la polea tiene masa y por tanto momento de inercia debemos añadir a la masa m una “masa equivalente” de la polea. Esta “masa equivalente” se puede calcular por un problema llamémoslo clásico, que es la máquina de Atwood, cuya aceleración es:

$$a = g\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + \frac{1}{2}M}$$

lo que quiere decir que la contribución de la polea es la de una “masa equivalente” a M/2, con lo que modificando la ecuación (5) resulta la (4).

5.-Una plataforma de masa m_1 se mueve con aceleración sobre unos raíles sin rozamiento. Sobre ella está dispuesto un cilindro homogéneo de masa m_2 y radio R, unido a la plataforma por un muelle de constante k, tal como indica la figura inferior



La masa m_2 puede rodar sobre la plataforma y ejecutar oscilaciones sobre ella. Determinar a) la frecuencia angular de las oscilaciones y b) las condiciones para que m_2 no ruede sobre la plataforma

a) Analizamos las fuerzas desde un sistema ligado a la plataforma, y por tanto un sistema no inercial, que actúan sobre el cilindro. Supongamos que el cilindro está separado de su posición de reposo una longitud x , que es lo que se estira el muelle. Las fuerzas que actúan sobre él son las de la figura 1

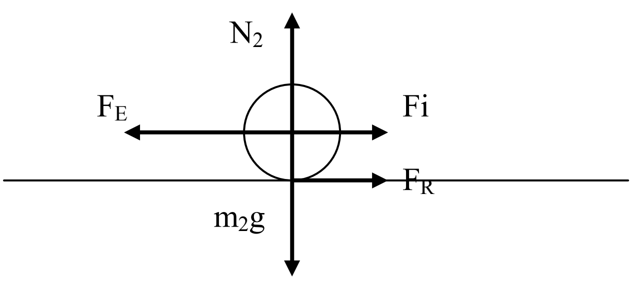


Fig. 1

N_2 Fuerza con que la plataforma empuja al cilindro
F_E Fuerza elástica con que el muelle tira del cilindro
Fi Fuerza de inercia debida a que el sistema de referencia no es inercial
F_R Fuerza de rozamiento
m_2g Peso del cilindro

Ecuaciones para la traslación y rotación del cilindro

$$F_E - Fi - F_R = m_2 a_2 \quad ; \quad F_R R = \frac{1}{2} m_2 R^2 \alpha \quad ; \quad a_2 = \alpha R$$

De las dos últimas ecuaciones resulta: $F_R = \frac{1}{2} m_2 a_2$.

De la primera ecuación : $kx - m_2 a_1 - \frac{1}{2} m_2 a_2 = m_2 a_2 \quad \Rightarrow \quad kx - m_2 a_1 = \frac{3}{2} m_2 a_2$ (1)

a_2 representa la aceleración del cilindro respecto de la plataforma y a_1 la de la plataforma respecto del suelo.

Sobre la plataforma actúan las fuerzas indicadas en la figura 2

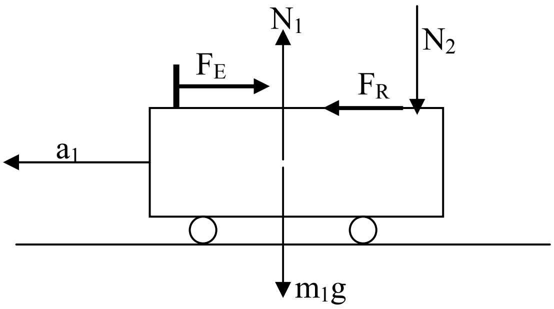


Fig. 2

Las fuerzas F_E y F_R que aparecen sobre la plataforma son las parejas de reacción de las fuerzas de interacción que actúan sobre el cilindro y en consecuencia aquí tienen sentidos contarios. De la figura 2 se deduce aplicando la ecuación de la Dinámica para la traslación desde unos ejes inerciales

$$F_R - F_E = m_1 a_1 \quad ; \quad \frac{1}{2} m_2 a_2 - kx = m_1 a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{m_2 a_2}{2m_1} - \frac{kx}{m_1} \quad (2)$$

Llevando (2) a la ecuación (1)

$$kx - m_2\left(\frac{m_2 a_2 - 2kx}{2m_1}\right) = \frac{3}{2} m_2 a_2 \quad \Rightarrow \quad kx + \frac{m_2 kx}{m_1} = a_2\left(\frac{3m_2}{2} + \frac{m_2^2}{2m_1}\right)$$

Finalmente

$$a_2 = \frac{2k(m_1 + m_2)}{m_2(3m_1 + m_2)} x = \omega^2 x \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2k(m_1 + m_2)}{m_2(3m_1 + m_2)}}$$

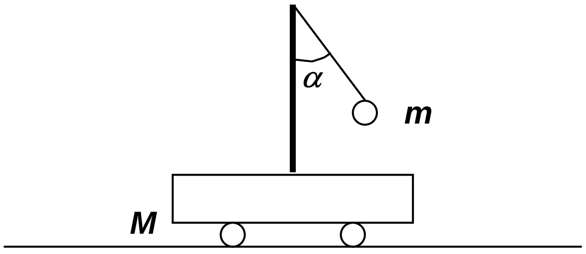
b) Si μ representa el coeficiente de rozamiento la fuerza de rozamiento entre el cilindro y la plataforma tiene como valor máximo, $\mu m_2 g$

$$\mu m_2 g = \frac{1}{2} m_2 a_2 = \frac{1}{2} m_2 \frac{2k(m_1 + m_2)}{m_2(3m_1 + m_2)} x$$

La máxima separación que el cilindro puede alcanzar respecto a su posición de equilibrio para que ruede es:

$$x_{max} = \frac{\mu m_2 g(3m_1 + m_2)}{k(m_1 + m_2)}$$

6.- Un péndulo simple tiene una longitud l = 0,76 m y una masa de m = 0,10 kg. Está colgado de una varilla rígida que a su vez está insertada sobre un carrito, de masa M = 0,5 kg, que carece de rozamiento sobre el suelo, tal como indica la figura inferior



El péndulo se separa de su posición de equilibrio un ángulo α = 8º y se deja en libertad. La bola del péndulo choca contra la barra de forma elástica. Determinar la velocidad del carrito

Antes de proceder cuantitativamente veamos el problema cualitativamente. En el momento inicial, cuando la bola se separa 8º de su posición de equilibrio y se deja en libertad, la cantidad de movimiento del sistema es nula ya que la bola y el carrito están en reposo.

Al dejar en libertad la bola del péndulo, ésta adquiere velocidad y por consiguiente cantidad de movimiento, por tanto, el carrito se desplaza hacia la derecha para que la cantidad de movimiento siga siendo nula. Cuando la bola choca contra la barra rebota con la misma velocidad que tenía antes del choque, pero con sentido contrario luego el carrito se moverá de derecha a izquierda para que la cantidad de movimiento siga siendo nula.

Supongamos que el péndulo forma un ángulo β con la vertical y sea v la velocidad de la bola con respecto al carrito.

En la figura 1 se observa la posición del péndulo

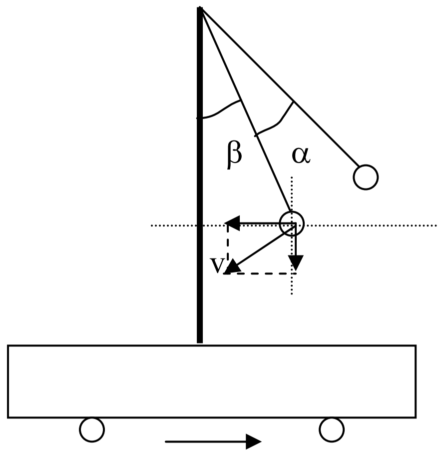


Fig. 1

La componente horizontal de la velocidad del péndulo respecto del carrito vale v cos β y la vertical v sen β. Designamos con Vc la velocidad del carrito respecto del suelo. La velocidad de la bola respecto del suelo vale Vc + v cos β.

El principio de conservación de la cantidad de movimiento nos dice que

$$m(Vc + v\cos\beta) + MVc = 0 \quad (1)$$

Las componentes de la velocidad de la bola respecto del suelo son :
Vc+v cos β y v sen β. El módulo de la velocidad de la bola respecto del suelo es :

$$\sqrt{(Vc + v\cos\beta +)^2 + (v\operatorname{sen}\beta)^2}$$

El principio de conservación de la energía

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}MVc^2 + \frac{1}{2}m\left[(Vc + v\cos\beta)^2 + (v\operatorname{sen}\beta)^2\right] = Ep = mgl(\cos\beta - \cos\alpha) \\ &\frac{1}{2}MVc^2 + \frac{1}{2}m\left[Vc^2 + 2Vc\cdot v\cos\beta + v^2\right] = mgl(\cos\beta - \cos\alpha) \end{aligned} \quad (2)$$

De la ecuación (1) se deduce que:

$$v\cos\beta = -\frac{Vc(m+M)}{m} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{Vc^2(m+M)^2}{m^2\cos^2\beta}$$

Con estas dos ecuaciones se opera en la (2)

$$\frac{1}{2}Vc^2(m+M) - Vc^2(m+M) + \frac{1}{2}m\frac{Vc^2(m+M)^2}{m^2\cos^2\beta} = mgl(\cos\beta - \cos\alpha)$$

$$\frac{Vc^2(m+M)}{2}\left[\frac{m+M}{m\cos^2\beta} - 1\right] = mgl(\cos\beta - \cos\alpha)$$

$$Vc = \sqrt{\frac{2m^2gl(\cos\beta - \cos\alpha)\cos^2\beta}{(m+M)\left[m + M - m\cos^2\beta\right]}} = \sqrt{\frac{2m^2gl(\cos\beta - \cos\alpha)\cos^2\beta}{(m+M)\left[M + m\cdot\operatorname{sen}^2\beta\right]}} \quad (3)$$

Cuando β = 0, esto es, cuando la bola llega a la barra y antes de chocar con ella la velocidad del carrito hacia la derecha es:

$$Vc(\beta = 0) = \sqrt{\frac{2 * 0{,}1^2 * 9{,}8 * 0{,}76(1-\cos 8^o)}{0{,}6 * 0{,}5}} = 0{,}069 \quad \frac{m}{s}$$

y la velocidad de la bola respecto del carrito, dirigida hacia la izquierda

$$v = \frac{Vc(m+M)}{m\cos\beta} = \frac{0{,}069 * 0{,}6}{0{,}1} = 0{,}414 \quad \frac{m}{s}$$

La ecuación (3) nos permite calcular la velocidad del carrito en función del ángulo beta y de ahí sacar el valor de v también en función del ángulo (tabla 1)

Tabla 1

ángulo	Velocidad del carrito , Vc	Velocidad de la bola , v
8	0	0
7,5	0,024	0,14
7	0,033	0,20
6,5	0,040	0,24
6	0,046	0,28
5,5	0,050	0,30
5	0,054	0,32
4,5	0,057	0,34
4	0,060	0,36
3,5	0,062	0,37
3	0,064	0,39
2,5	0,066	0,40
2	0,067	0,40
1,5	0,068	0,41
1	0,069	0,41
0,5	0,069	0,42
0	0,069	0,42

Una vez que la bola del péndulo choque con la barra del carrito, rebotará con la misma velocidad con que impactó, pero ahora la velocidad es de sentido contrario y por tanto lo mismo le ocurrirá al carrito ya que al no haber fuerzas exteriores la cantidad de movimiento se debe conservar y ser nula tal como lo era al principio. En consecuencia el carrito se desplazará en sentido contrario a como lo venía haciendo y el proceso se repetirá una y otra vez.

Para calcular el tiempo que la bola emplea desde la posición inicial hasta que choca con la barra lo hacemos por un método aproximado. Supondremos que para pasar desde un ángulo de 8 a 7,5 grados su velocidad es la media aritmética entre 0 y 0,14 m/s que son las velocidades a 8 y 7,5 grados y que recorre una longitud de

$$\text{arco} = \Delta s = \text{ángulo} * \text{radio} = \frac{0{,}5 * 2\pi}{360} * 0{,}76 = 0{,}00663 \ \ m$$

y emplea un intervalo de tiempo de

$$\Delta t = \frac{\text{arco}}{\text{velocidad media}} = \frac{0{,}00663}{\frac{0+0{,}14}{2}} = 0{,}095 \text{ s}$$

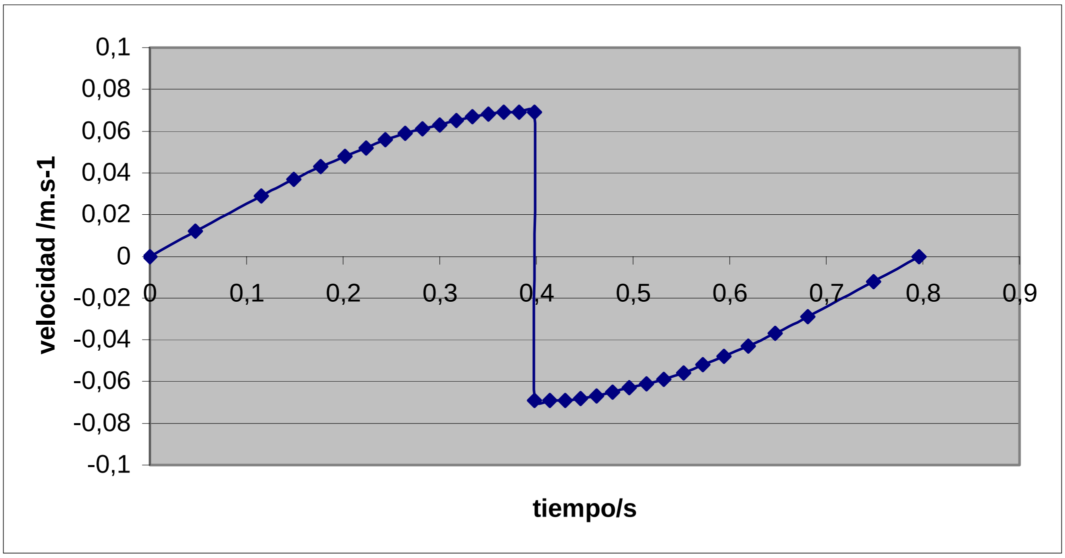
Para construir la gráfica establecemos: que la velocidad media del carrito entre el intervalo 0-0,095 s vale ((0+0,024)/2 = 0,012 m/s y adjudicamos esa velocidad al punto medio de ese intervalo.
Ahora calculamos el intervalo de tiempo entre 7,5 º y 7º

$$\Delta t = \frac{\text{arco}}{\text{velocidad}} = \frac{0{,}00663}{\frac{0{,}14+0{,}20}{2}} = 0{,}039 \text{ s}$$

la velocidad media del carrito (0,033+0,0024)/2 = 0,029 m/s se adjudica a la mitad del intervalo de tiempo entre 0,095 y (0,095+0,039=0,0134)El procedimiento se sigue con los demás valores y los resultados se recogen en la tabla 2.

Tabla 2

Intervalo de tiempo	Velocidad media	tiempo
0	0	0
0,095-0,134	0,029	0,115
0,134-0,164	0,037	0,149
0,164-0,190	0,043	0,177
0,190-0,213	0,048	0,202
0,213-0,234	0,052	0,224
0,234-0,254	0,056	0,244
0,254-0,273	0,059	0,264
0,273-0,291	0,061	0,282
0,291-0,308	0,063	0,300
0,308-0,325	0,065	0,317
0,325-0,342	0,067	0,334
0,342-0,358	0,068	0,350
0,358-0,374	0,069	0,366
0,374-0,390	0,069	0,382
0,390-0,406	0,069	0,398



La gráfica anterior representa los valores de la tabla 2, y además al ser simétrica la curva a partir de 0,398 segundos también se ha dibujado la velocidad hasta el tiempo 0,796 segundos.

7.- Un vagón se encuentra sobre una vía horizontal y con una aceleración constante a dirigida de izquierda a derecha. Desde el extremo izquierdo del vagón, una persona lanza un objeto de modo que su velocidad de salida es v respecto del vagón y dicha velocidad forma un ángulo α respecto de la horizontal. Si el objeto al cabo de un tiempo vuelve a incidir sobre la persona , determinar el ángulo de salida

Analizamos el problema desde el punto de vista de un observador ligado a un sistema inercial que se encuentra sobre la vía (fig.1)

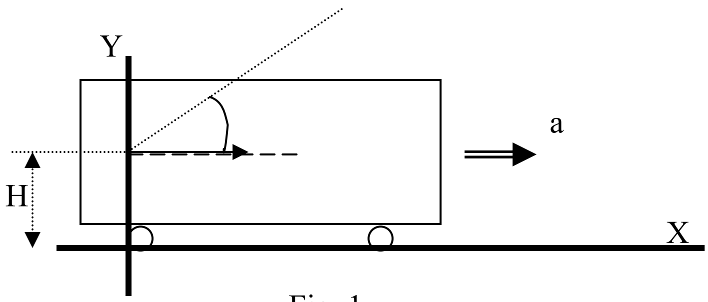


Fig. 1

Para el observador ligado al sistema inercial XY, la velocidad de salida del objeto es la suma vectorial de v y V_o, siendo V_o la velocidad que lleva el vagón en el instante inicial de salida del objeto. Para este observador sólo existen fuerzas reales y por tanto establece que el objeto se encuentra sometido a la acción de su peso. Las ecuaciones del movimiento para el objeto son :

$$x = \left(v\cos\alpha + V_o\right)\ t \quad ; \quad y = H + v\operatorname{sen}\alpha\ t - \frac{1}{2}gt^2$$

La ecuación para el desplazamiento del vagón es :

$$X_V = V_o t + \frac{1}{2}at^2$$

Cuando el objeto vuelva a la persona su coordenada x debe ser igual a X_V y su coordenada y = H

$$x = X_V \;\Rightarrow\; v\cos\alpha\ t + V_o t = V_o t + \frac{1}{2}at^2 \;\Rightarrow\; t = \frac{2v\cos\alpha}{a}$$

$$H = H + v\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{2v\cos\alpha}{a}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{2v\cos\alpha}{a}\right)^2 \;\Rightarrow\; \operatorname{tag}\ \alpha = \frac{g}{a}$$

Analizamos ahora el problema desde el punto de vista de un observador ligado al vagón y que sabe que está acelerado (fig. 2)

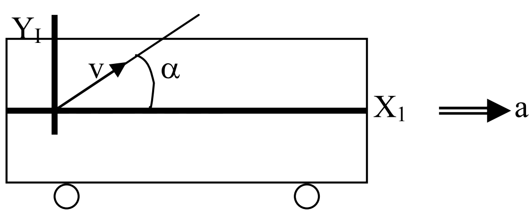


Fig 2

Para este observador la velocidad de salida del objeto es v. Al estar y saber que está en un sistema inercial admite que sobre el cuerpo existe, aparte de la fuerza real de la gravedad, una fuerza de inercia de sentido contrario a la aceleración del vagón

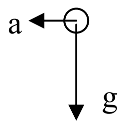


Fig. 3

Razona que el objeto se encuentra sobre el eje Y_I sometido a un movimiento uniformemente retardado de aceleración g y sobre el eje X_I un movimiento uniformemente retardado de aceleración a (fig. 3). Las ecuaciones del movimiento son:

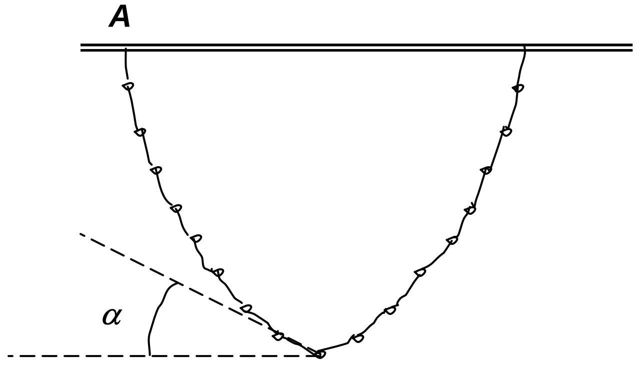
$$x_1 = v\cos\alpha \ t - \frac{1}{2}at^2 \quad ; \quad y_1 = v\,\mathrm{sen}\alpha \ t - \frac{1}{2}gt^2$$

Cuando la pelota vuelva al observador sus coordenadas (en el sistema X_I,Y_I) son $x_1 = 0$; $y_1 = 0$.

$$v\cos\alpha = \frac{1}{2}at \quad ; \quad v\,\mathrm{sen}\alpha = \frac{1}{2}gt \quad \Rightarrow \quad \frac{v\,\mathrm{sen}\alpha}{v\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{2}gt}{\frac{1}{2}at} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tag}\ \alpha = \frac{g}{a}$$

Ambos observadores llegan al mismo resultado, pero el situado en el sistema no inercial debe introducir una fuerza ficticia de inercia.

8.- Una cadena que está formada por 18 varillas rectas rígidas y uniformes, se ha colgado de un techo horizontal.



Cada varilla puede girar libremente en sus puntos de unión de manera que adopta una posición simétrica tal como se ve en la figura. La última varilla forma con la horizontal un ángulo α = 30º, a) Calcular el ángulo que forma la varilla que está enganchada al techo en el punto A b) Si el peso total de la cadena es P determinar las fuerzas que actúan sobre el techo en el punto A.

Supongamos que el sistema está formado únicamente por seis varillas

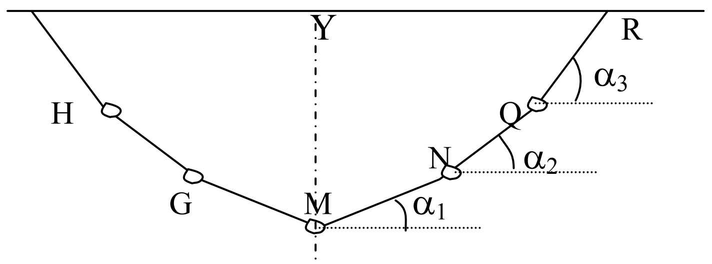


Fig. 1

Cada varilla tiene una masa m y forman con la horizontal los ángulos señalados en la figura1.Las fuerzas que actúan sobre la varilla MN están en la figura2

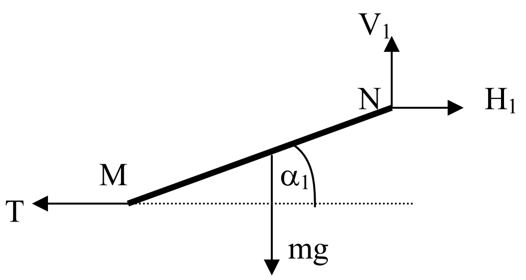


Fig.2

Al estar en equilibrio la varilla la suma de las fuerzas es nula y los momentos de dichas fuerzas respecto del punto N son nulos. Si L representa la longitud de la varilla y m su masa resulta:

$$T = H_1 \;\; ; V_1 = mg \; ; \quad T * L sen\alpha_1 = mg * \frac{L}{2} cos\alpha_1 \quad \Rightarrow \quad tag\alpha_1 = \frac{mg}{2T} \;\; (1)$$

La fuerza en M que ejerce la varilla GM sobre la MN solamente tiene componente horizontal.

Las fuerzas que actúan sobre la varilla NQ son las de la figura 3

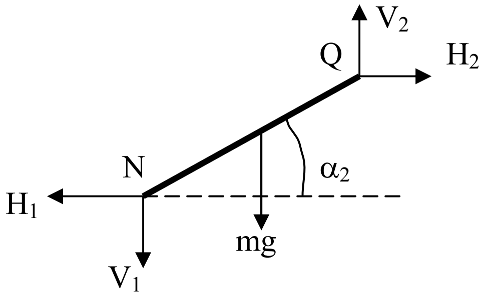


Fig.3

H_1 y V_1 en la varilla NQ son las **reacciones** a H_1 y V_1 en la varilla MN

V_2-V_1 = mg ; V_1 = mg ; H_1 =T ; V_2 = 2mg

$$T * L\text{sen}\alpha_2 = mg * \frac{L}{2}\cos\alpha_2 + V_1 L\cos\alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \text{tag}\alpha_2 = \frac{V_1 + \frac{mg}{2}}{T} = \frac{3mg}{2T} = 3 \ \text{tag}\alpha_1$$

Las fuerzas que actúan sobre la varilla QR son las de la figura 4

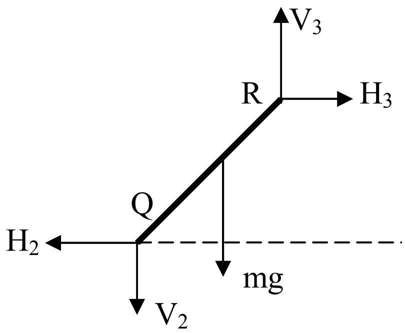


Fig.4

H_2 y V_2 en la varilla QR son las reacciones a H_2 y V_2 en la varilla NQ

V_3-V_2 = mg ; V_2 = 2mg ; H_1 = H_2 = H_3 = T ; V_3 = 3mg

$$T * L\text{sen}\alpha_3 = mg * \frac{L}{2}\cos\alpha_3 + V_2 L\cos\alpha_3 \quad \Rightarrow \quad \text{tag}\alpha_3 = \frac{V_2 + \frac{mg}{2}}{T} = \frac{5mg}{2T} = 5 \ \text{tag}\alpha_1$$

La secuencia de los ángulos es tag α , 3 tag α , 5 tag α ..., esto es, la secuencia de los números impares, por tanto , el lugar nueve le corresponde un ángulo de 17 tag α_1

$$\alpha_9 = 17 \ \text{tag}\alpha = 17 \ \text{tag}30^o \quad \Rightarrow \quad \alpha_9 = 84{,}2^o$$

Obsérvese que en la varilla MN la fuerza que actúa sobre M es horizontal y no hay componente vertical, Esto se explica dada la simetría de la cadena respecto al eje MY de la figura 1. Si hubiese componente vertical se produciría una asimetría tal como se ve en la figura 5

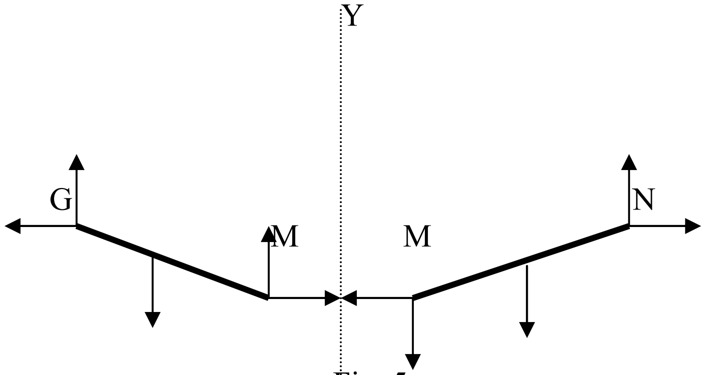


Fig. 5

b) Las componentes vertical y horizontal valen para la varilla nueve: $V_9 = 9$ mg y $H_9 = T$ de la ecuación (1) resulta que $T = \frac{mg}{2\ \text{tag}30^o} = \frac{\sqrt{3}\ mg}{2}$. La resultante de ambas componentes es:

$$R = \sqrt{(9mg)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}mg\right)^2} = mg\sqrt{81+\frac{3}{4}} = \frac{mg}{2}\sqrt{327}$$

Como P = 18 mg resulta finalmente:

$$R = \frac{P}{36}\sqrt{327}$$