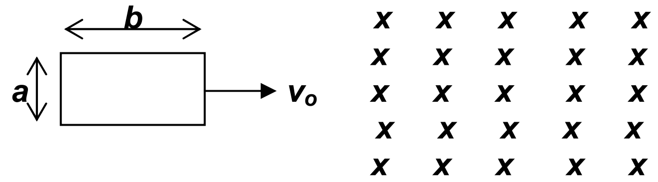
Electricidad III

28.- Una espira rectangular se dirige con una velocidad v_o hacia el interior de un campo magnético uniforme y perpendicular al plano del papel y dirigido hacia adentro



La resistencia eléctrica de la espira es R y su masa m. Determinar cómo varía la velocidad cuando la espira entre dentro del campo magnético

Cuando la espira penetre dentro del campo magnético se producirá una corriente inducida en ella. Esto supone la aparición de energía eléctrica la cual proviene de la pérdida de energía cinética de la espira. En consecuencia su velocidad disminuirá. Designamos con v la velocidad de la espira cuando ha penetrado algo dentro del campo magnético, designamos un tiempo dt con lo que la espira ha avanzado una distancia vdt dentro del campo. Como consecuencia de ello la superficie que ha penetrado en el citado campo es dS =avdt y la variación de flujo es $d\Phi = B\ dS = Bav\ dt$:

La fuerza electromotriz inducida en la espira

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bva$$

La energía eléctrica que aparece en la espira es $dE = I^2 R dt = \frac{\varepsilon^2}{R} dt = \frac{B^2 a\ v^2}{R} dt$. Esta energía aparece a costa de la correspondiente disminución de la energía cinética de la espira $dE = d\left(\frac{1}{2} mv^2\right) = mvdv$. De ambas expresiones se deduce que

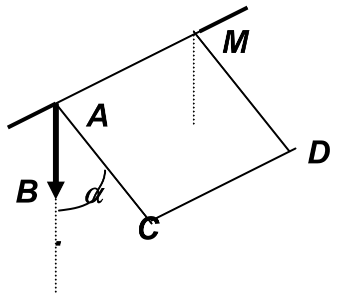
$$-\frac{B^2 av^2}{R} dt = mvdv \quad \Rightarrow \quad \int -\frac{B^2 a}{mR} dt = \int \frac{dv}{v} \quad \Rightarrow \quad -\frac{B^2 a}{mR} t = \ln v + Cte$$

Cuando, t = 0, el valor de la velocidad es v_o

$$\ln \frac{v}{v_o} = -\frac{B^2 a}{mR} t \qquad \Rightarrow \qquad v = v_o e^{-\frac{B^2 a}{mR} t}$$

La velocidad disminuye exponencialmente hasta que toda la espira esté dentro del campo magnético, a partir de ese momento la velocidad vuelve a ser constante, naturalmente menor que v_o, ya que cuando la espira esté por completo dentro del campo magnético ya ni se produce variación de flujo, ni aparición de energía eléctrica, ni disminución de la velocidad.

29- Una espira cuadrada tiene de lado L . Cada lado es una barra rígida de masa m y resistencia eléctrica R. Dicha espira se coloca en el seno de un campo magnético B de dirección vertical hacia abajo. La espira puede girar alrededor de un eje que pasa por el lado AM



Por dicha espira se hace circular una corriente uniéndola a un generador de corriente continua y de f.e.m. U. Calcular a) el valor del ángulo α cuando la espira esté en equilibrio b) Si ahora por la espira no pasa corriente y ésta se separa de su posición vertical un ángulo pequeño encontrar la ecuación diferencial del movimiento

Para que la espira esté en equilibrio los momentos de la fuerza peso y de la fuerza magnética respecto del eje de rotación deben ser iguales y opuestos. En la figura 1 se encuentra una vista lateral de la espira y además el sentido de la corriente en ella.

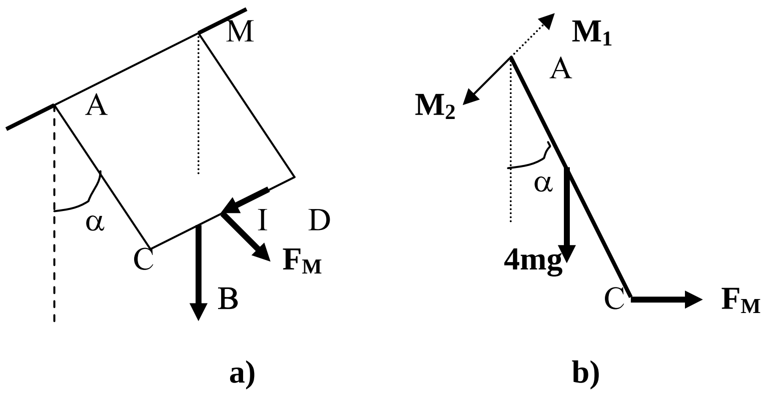


Fig 1

El momento de la fuerza del peso es un vector $\mathbf{M_1}$ que está contenido en el eje de giro y hacia adentro del papel en la figura b). El momento de la fuerza magnética $\mathbf{M_2}$ es un vector que está sobre el eje de giro y en la figura b) su sentido es hacia fuera del plano del papel. Los módulos de los dos vectores son iguales

$$4mg * \frac{L}{2} \text{sen}\alpha = F_M L\cos\alpha = iLBL\cos\alpha = \frac{U}{4R} BL^2 \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \text{tag}\alpha = \frac{UBL}{8mgR}$$

Si por la espira no pasa corriente y la separamos de su posición vertical un ángulo β, la espira tiende a ocupar su posición vertical debido al momento del peso, pero al hacerlo varía el flujo externo que atraviesa la espira por lo que se induce en ella una corriente que por sus efectos tiende a mantener el flujo magnético del campo exterior **B**. Esa corriente se dirige de C a D e interacciona con el campo exterior **B** para crear un momento $\mathbf{M_3}$ que tiene la misma dirección y sentido que $\mathbf{M_1}$ en la figura 1b)
La ecuación del movimiento de la espira es

$$M_1 + M_3 = I\gamma$$

en donde I es el momento de inercia de la espira respecto del eje de rotación y γ la aceleración angular.
M_1 ya ha sido calculado antes y su valor es $M_1 = 2mgL\text{sen}\beta \approx 2mgL\beta$, al ser el ángulo pequeño el valor del seno coincide con el valor del ángulo en radianes.

$$M_2 = F_m L\cos\beta \approx F_m L = iLB * L$$

i es la corriente inducida en la espira que ahora se dirige desde el vértice C al D. La fuerza electromotriz inducida en la espira se calcula mediante la ley de Faraday-Henry

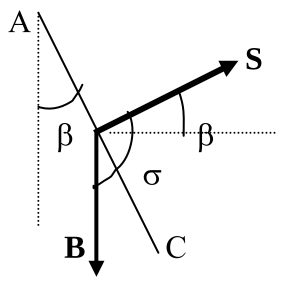


Fig. 2

En la figura 2 se observa que σ = β + 90º , por tanto cos σ = sen β

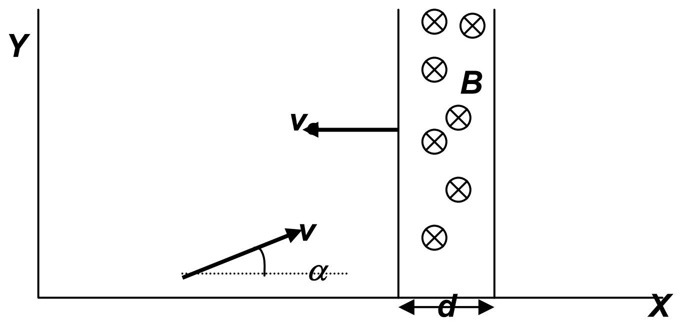
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(BS\cos\sigma)}{dt} = -\frac{d(BS\text{sen}\beta)}{dt} \approx -BS\frac{d\beta}{dt} = -BL^2\frac{d\beta}{dt}$$

$$i = \frac{\varepsilon}{4R} = -\frac{BL^2}{4R}\frac{d\beta}{dt} \quad ; \quad M_3 = -iL^2B = -\frac{B^2L^4}{4R}\frac{d\beta}{dt}$$

La ecuación diferencial del movimiento de la espira es:

$$-\frac{B^2L^4}{4R}\frac{d\beta}{dt} - 2mgL\beta = I\gamma = I\frac{d^2\beta}{dt^2}$$

30.- Un campo magnético uniforme de inducción B=10^{-3} T ocupa una cierta región del espacio tal como indica la figura inferior



Dicho campo se desplaza con velocidad v_o= 3 m/s hacia la izquierda. Una partícula de carga q = 1,6.10^{-17} C y masa m =1,7.10^{-21} kg se mueve hacia el campo magnético con una velocidad v = 10 m/s que forma un ángulo α = 30º con el eje X. Las dos velocidades están dadas respecto al sistema XY. Calcular el valor del ancho del campo d, para que la partícula cargada abandone el campo magnético de modo que su velocidad respecto del sistema XY solamente tenga componente sobre el eje Y.

El campo magnético se encuentra en reposo respecto de un sistema de coordenadas X_1,Y_1, ligado al propio campo magnético (fig. 1)

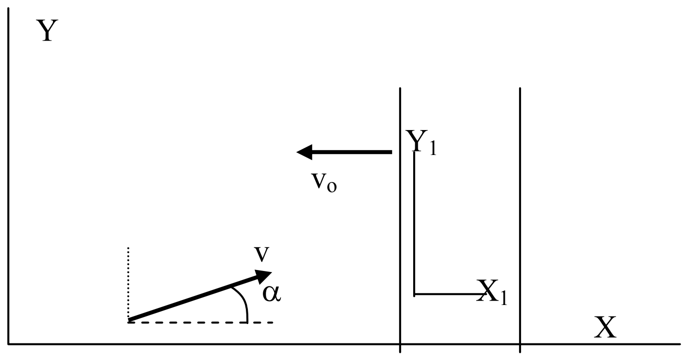


Fig. 1

La velocidad de la partícula es v respecto al sistema XY, pero respecto del sistema X_1,Y_1 vale v_1, siendo sus componentes (v cos α + v_o ; v sen α). Al penetrar en el campo magnético la partícula describe una trayectoria circular respecto del sistema X_1Y_1, cuyo radio es:

$$m\frac{v_1^2}{R} = qv_1B \quad \Rightarrow \quad R = \frac{mv_1}{qB} = \frac{1{,}7.10^{-21} * \sqrt{(10\cos 30 + 3)^2 + (10\text{sen}30)^2}}{1{,}6.10^{-17} * 10^{-3}} = 1{,}348 \text{ m}$$

Cuando la partícula abandone el campo magnético su velocidad respecto del sistema X_1Y_1 forma un ángulo β con la vertical, y respecto del sistema XY solamente tendrá componente Y. (fig. 2.)

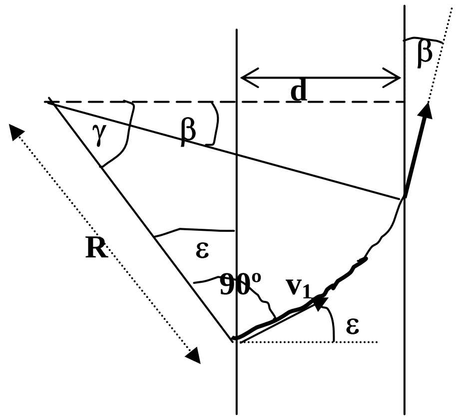


Fig. 2

Las componentes del vector velocidad v_1 en el sistema X_1Y_1 son (10 cos 30+3 ; 10 sen 30), por tanto , el ángulo ε vale :

$$\text{tag}\varepsilon = \frac{10\text{sen}30}{10\cos 30 + 3} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 23{,}21^{\text{o}} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 90 - 23{,}21 = 66{,}79^{\text{o}}$$

En el punto de entrada de la partícula en el campo **B** , su velocidad v_1 tiene de componentes (v sen α + vo ; v sen α), en el punto de salida la velocidad es también v_1 y sus componentes son (0 + vo ; v´), siendo v´ la componente sobre el eje Y de la velocidad de la partícula en el sistema XY y cero la componente sobre el eje X en dicho sistema, ya que el enunciado dice que la partícula cuando abandona el campo debe tener solamente componente Y. De lo anterior se deduce que:

$$\text{sen}\beta = \frac{v_o}{v_1} = \frac{3}{\sqrt{(10\cos 30 + 3)^2 + (10\text{sen}30)^2}} \quad \Rightarrow \quad \beta = 13{,}68^{\text{o}}$$

De la fig. 2 se deduce que

$$d = R(\cos\beta - \cos\gamma) = 1{,}348 * (\cos 13{,}68 - \cos 66{,}79) = 0{,}78 \quad \text{m}$$

31.- Un electrón describe una circunferencia en el seno de un campo magnético de inducción B = 1 T. Si este electrón pierde potencia debido a su aceleración, según la expresión:

$$P = \frac{2}{3} k \frac{q^2 a_c^2}{c^3}$$

en la que $k = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o} = 9.10^9 \frac{N.m^2}{C^2}$ ***, q es la carga del electrón = 1,6.10⁻¹⁹ C, a_c es la aceleración centrípeta del electrón y c la velocidad de la luz =***

3.10^8 m/s. Calcular el tiempo que transcurre para que el radio de la órbita se reduzca a la mitad.

Sea v_o la velocidad del electrón en el instante t =0. En ese momento el radio de su órbita es:

$$\frac{mv_o^2}{R_o} = qv_oB \qquad \Rightarrow \qquad R_o = \frac{mv_o}{qB}$$

A consecuencia de que el electrón emite energía electromagnética, la cual procede de la disminución de su energía cinética, podemos escribir:

$$-\frac{dE_C}{dt} = \frac{2}{3}k\frac{q^2}{c^3}\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad -(mvdv) = \frac{2}{3}k\frac{q^2}{c^3}\frac{v^4}{R^2}dt = \frac{2}{3}k\frac{q^2}{c^3}\frac{v^4q^2B^2}{m^2v^2}dt$$

$$-vdv = \frac{2}{3}k\frac{q^4B^2}{c^3m^3}dt \quad \Rightarrow \quad -\int_{vo}^{v}\frac{dv}{v} = \frac{2}{3}k\frac{q^4B^2}{c^3m^3}\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad v = v_oe^{-Mt}$$

Siendo: $$M = \frac{2}{3}k\frac{q^4B^2}{c^3m^3} = \frac{2*9.10^9*\left(1,6.10^{-19}\right)^4*1^2}{3*\left(3.10^8\right)^3*\left(9,1.10^{-31}\right)^3} = 0,19 \ \ s^{-1}$$

El radio de la órbita varía con el tiempo según la expresión:

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{mv_oe^{-Mt}}{qB} = R_oe^{-Mt}$$

Cuando $R = R_o/2$

$$\frac{1}{2} = e^{-Mt} \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{\ln 2}{M} = 3,6 \ \ s$$

32.- Un anillo de resistencia R y masa m cae a lo largo del eje Z manteniendo su plano paralelo al XY. En su caída atraviesa un campo magnético cuyo flujo a través del anillo es $\Phi = \Phi_o + bz$. El anillo se encuentra en reposo en la posición z =0 . Calcular la rapidez con que se produce calor en dicho anillo, esto es, calcular la relación dQ/dt.

Ayuda.- La ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = a - cy$ tiene como solución $y = \frac{a}{c}\left(1 - e^{-ct}\right)$

En su caída sobre el anillo aparece una fuerza electromotriz inducida que viene dada por la ley de Faraday

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(\Phi_o + bz)}{dt} = -b\frac{dz}{dt} = -bv$$

A consecuencia de la aparición de esta fuerza electromotriz en el anillo se crea una corriente por el mismo que produce energía calorífica de acuerdo con la expresión:

$$dQ = \frac{\varepsilon^2}{R}dt \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dQ}{dt} = \frac{\varepsilon^2}{R} = \frac{b^2v^2}{R}$$

La expresión anterior nos dice que esta apareciendo energía calorífica en el anillo, la cual tiene que proceder de otra fuente y ésa es precisamente la energía mecánica que inicialmente tiene el anillo. Esto significa que la disminución de la energía mecánica del anillo en su caída se invierte en energía calorífica en el propio anillo.

$$-\frac{dE}{dt} = -\frac{d\left(mgz + \frac{1}{2}mv^2\right)}{dt} = -mg\frac{dz}{dt} - mv\frac{dv}{dt} = -mgv - mv\frac{dv}{dt} = \frac{b^2v^2}{R} \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{b^2v}{Rm} - g = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{mgR}{b^2}\left(1 - e^{-\frac{b^2}{mR}t}\right) \quad (1)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{b^2}{R}\left(\frac{mgR}{b^2}\right)^2\left[1 - e^{-\frac{b^2}{mR}t}\right]^2 = \frac{m^2g^2R}{b^2}\left[1 - e^{-\frac{b^2}{mR}t}\right]^2 \quad (2)$$

La ecuación (1) nos dice que al cabo de un tiempo grande la velocidad tiende a un valor límite y por tanto el anillo se desplaza con movimiento uniforme. Por las mismas razones y en esas condiciones la producción de calor es constante.

33.- Un electrón se desplaza por una región donde existe un campo eléctrico $\vec{E}$ y uno magnético $\vec{B}$, ambos campos son paralelos. La velocidad inicial del electrón es v_o y es perpendicular a E y B. Describir el movimiento del electrón

Supongamos que los campos eléctrico y magnético tienen la dirección del eje Y, y la velocidad v_o la del eje X. Si sólo existiese el campo magnético el electrón sufriría una fuerza dada por la expresión

$$\mathbf{F_B} = q\mathbf{v_o} \times \mathbf{B} \qquad \Rightarrow \qquad F_B = qv_oB$$

La fuerza es perpendicular al vector velocidad y eso es precisamente la característica de un movimiento circular y uniforme.

Tal como se indica en la figura 1 el electrón describiría una circunferencia en el plano XZ.

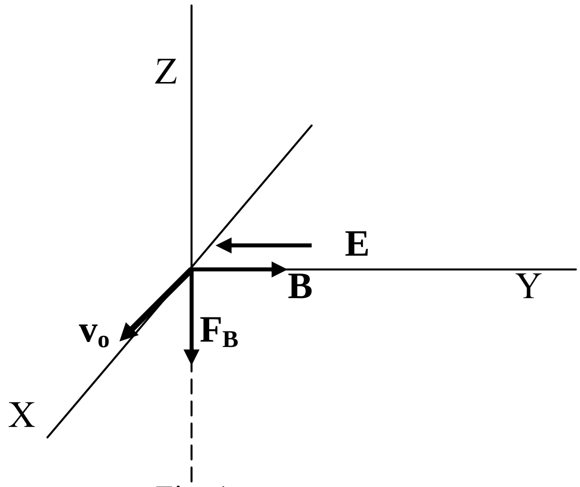


Fig. 1

Al existir el campo eléctrico el electrón sufre una fuerza $\mathbf{F_E} = q\mathbf{E}$, si **E** está dirigido hacia el eje Y negativo la fuerza $\mathbf{F_E}$ lo esta hacia el eje Y positivo, dado que la carga del electrón es negativa. Esta fuerza provoca una aceleración constante sobre el eje Y y en consecuencia el electrón aumenta su velocidad linealmente con el tiempo. En consecuencia el electrón combina dos movimientos el circular debido al campo magnético y el lineal acelerado debido al eléctrico. El resultado es una espiral cuyo paso es cada vez más grande.
La aceleración del electrón sobre el eje Y es

$$a_y = \frac{qE}{m}$$

La distancia entre las espirales se calculan teniendo en cuenta que sobre el eje Y el movimiento es uniformemente acelerado siendo T el periodo, esto es, el tiempo que el electrón emplea en girar 360º.

Este periodo se calcula de la siguiente relación:

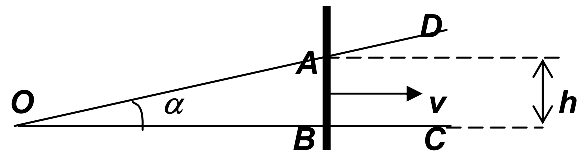
$$F_B = qv_oB = \frac{mv_o^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{mv_o}{qB} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi\ R}{v_o} = \frac{2\pi\ m}{qB}$$

La distancia aplicando la cinemática del movimiento uniformemente acelerado.

$$D_1 = \frac{1}{2}a_y T^2; \quad D_2 = \frac{1}{2}a_y 4T^2 - \frac{1}{2}a_y T^2 = 3D_1; \quad D_3 = \frac{1}{2}a_y 9T^2 - \frac{1}{2}a_y 4T^2 = 5D_1$$

34.- En la figura inferior OD y OC son dos conductores que suponemos sin resistencia eléctrica. Sobre ellos desliza la barra metálica AB con una

velocidad constante v y manteniéndose siempre perpendicular al conductor OC, el cual tiene una longitud L. El conjunto está inmerso en un campo magnético uniforme y perpendicular a los conductores de inducción magnética B.



Calcular el calor generado en el proceso de trasladar la barra metálica AB desde el punto O al punto C.
La resistencia eléctrica de la barra por unidad de longitud es β expresada en $\frac{\Omega}{m}$.

Admitimos que B es perpendicular al plano del papel y dirigido hacia dentro del mismo. Al trasladar la barra hacia la derecha el flujo magnético que atraviesa el circuito OBA aumenta, porque aumenta su superficie. Al aumentar el flujo magnético, se crea una corriente inducida en el circuito OBA. Teniendo en cuenta la ley de Lenz se deduce que la corriente circula por la barra metálica en el sentido BA ya que de esta manera la corriente inducida se opone a la causa exterior. A su vez el conductor AB, debido a esa corriente inducida está sometido a una fuerza que tiene la dirección de **v** y sentido contrario. Esto puede deducirse por el hecho de que un conductor en el seno de un campo magnético está sometido a una fuerza

$$\mathbf{F} = \mathrm{I}\ \mathbf{h} \times \mathbf{B}$$

En la figura 1 se representan los vectores vistos en perspectiva

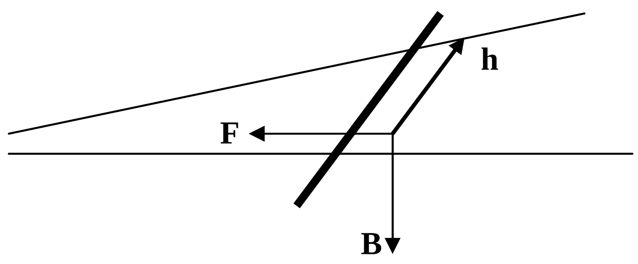


Fig.1

También puede razonarse el sentido de F contrario al de v, porque de no ser así, resultaría que a medida que se desliza la barra AB lo haría cada vez más deprisa y cada vez se generaría más energía sin gasto alguno y esto es contrario al principio de conservación de la energía. Por tanto el arrastrar la barra con velocidad constante v, supone un trabajo debido a la fuerza F. Ese trabajo que hemos de realizar termina en forma de calor. Basta, por tanto, evaluar ese trabajo para tener el calor generado.

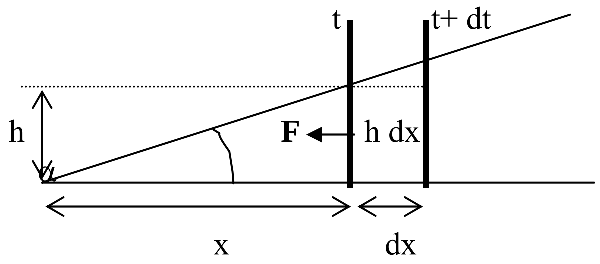


Fig. 2

En la figura 2 se representa la barra con una altura h = x tag α, en un tiempo que designamos con t. Luego la barra se desplaza dx y emplea un tiempo dt y el área aumenta en

$$dS = hdx + \frac{dh * dx}{2} = hdx$$

La velocidad de la barra vale $v = \frac{dx}{dt}$

La definición de trabajo es:

$$W = \int_0^L Fdx = \int_o^L IhBdx = \int_o^L \frac{\varepsilon}{R} hBdx \quad (1)$$

R es la resistencia del circuito que corresponde a la barra AB cuando tiene una altura h y vale $R = \beta h \ = \beta \ x \ \text{tag}\alpha$ (2)

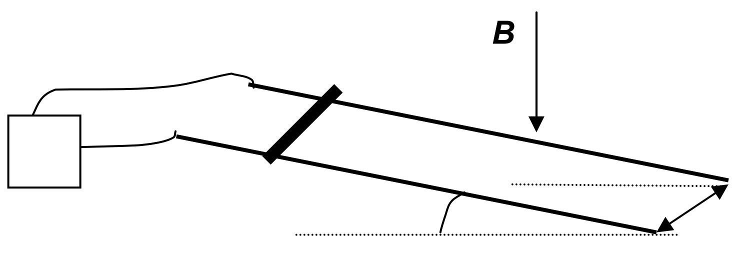
De acuerdo con la ley de Faraday-Henry el valor de la fuerza electromotriz inducida en el circuito es en valor absoluto

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(BS)}{dt} = B\frac{dS}{dt} = B\frac{hdx}{dt} = Bhv = Bv \ x \ \text{tag}\alpha \ (3)$$

Llevamos (2) y (3) a (1)

$$W = \int_o^L \frac{\varepsilon}{R} hBdx = \int_0^L \frac{Bv\, x \ \text{tag}\alpha}{\beta \ x\text{tag}\alpha} * x \ \text{tag}\alpha * B * dx = \frac{B^2 v \ \text{tag}\alpha}{\beta}\int_o^L xdx = \frac{B^2 v \ \text{tag}\alpha}{\beta} * \frac{L^2}{2}$$

35.- Una barra metálica de masa m puede deslizar con rozamiento sobre dos raíles que forman un ángulo α con la horizontal, tal como indica la figura inferior. Los extremos de los raíles están conectados a un generador de corriente continua y todo el sistema está inmerso en un campo magnético B vertical



X

Generador *Y*

α *d*

La distancia entre los railes es d . La barra desliza por los raíles con una aceleración constante a. Calcular la intensidad de la corriente que circula por la barra deslizante y la fuerza electromotriz del generador para los siguientes datos:
α = 30º ; a = 3 m/s^2 , d = 0,2 m , B= 0,05 T , ρ = 0,006 Ω m^{-1}(resistividad de los raíles), m=0,064 kg ; coeficiente de rozamiento $\mu = 0{,}2$.
En el tiempo inicial la barra se encuentra en el extremo superior de los raíles sin velocidad inicial.

Consideremos que la barra ha recorrido sobre los raíles una cierta distancia y que en ese momento es recorrida por una corriente de intensidad I proporcionada por el generador y en el sentido YX. Las fuerzas que actúan sobre dicha barra están representadas en la figura 1

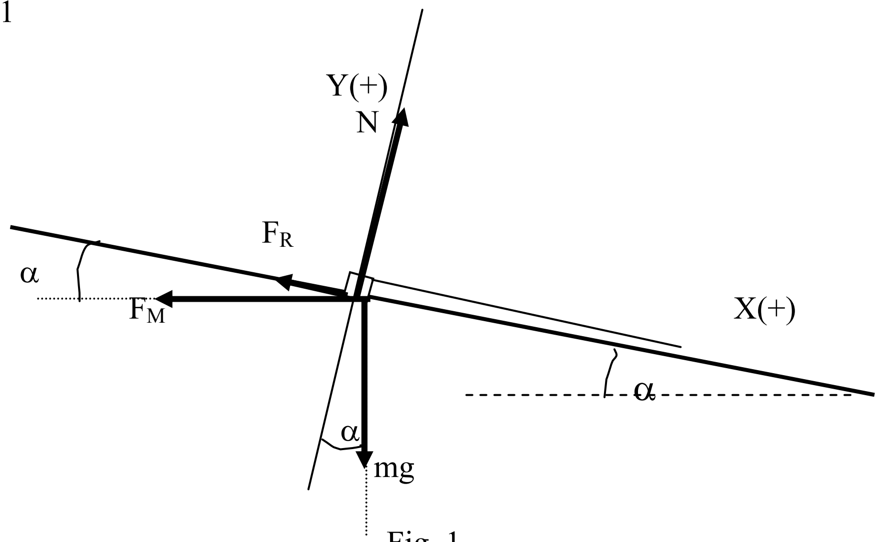


Fig. 1

La dirección de la fuerza magnética $\mathbf{F_M}$ se determina a partir del producto vectorial

$$\mathbf{F_M} = I \;\; \mathbf{d} \times \mathbf{B}$$

En la figura 2 están representados los vectores **l** , **B** y $\mathbf{F_M}$.

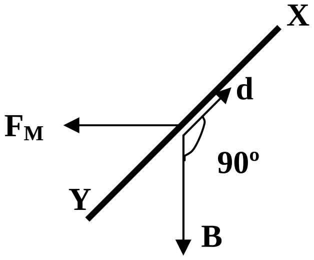


Fig. 2

Si en la figura proyectamos las fuerzas sobre los ejes coordenados allí indicados tenemos:

$$N = mg\cos\alpha + F_M \operatorname{sen}\alpha$$
$$mg\operatorname{sen}\alpha - F_R - F_M\cos\alpha = ma$$

Dado que la fuerza de rozamiento es: $F_R = \mu N = \mu\left(mg\cos\alpha + F_M\operatorname{sen}\alpha\right)$ y que la fuerza magnética es : $F_M = IdB$, podemos escribir:

$$mg\operatorname{sen}\alpha - \mu\left(mg\cos\alpha + IdB\operatorname{sen}\alpha\right) - IdB\cos\alpha = ma$$

de acuerdo con el enunciado del problema la aceleración es constante , por tanto todos los términos del primer miembro han de ser constantes, por tanto , I = Constante.

$$I = \frac{mg(\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha) - ma}{dB(\cos\alpha + \mu\operatorname{sen}\alpha)} = \frac{0{,}064 * 9{,}81(\operatorname{sen}30 - 0{,}2\cos 30) - 0{,}064 * 3}{0{,}2 * 0{,}05(\cos 30 + 0{,}2\operatorname{sen}30)} = 1{,}36 \text{ A}$$

Por otra parte la barra al descender por los raíles corta el campo magnético B por lo que se produce una fuerza electromotriz de valor

$$\varepsilon = \oint(\mathbf{v} \times \mathbf{B}).\mathbf{dr}$$

Los vectores velocidad y campo magnético forman un ángulo β, y tal como se ve en la figura 3 es el complementario de α.

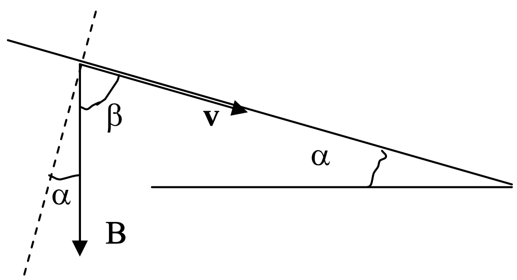


Fig. 3

El producto vectorial de la velocidad por el campo vale

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = vB\operatorname{sen}\beta = vB\cos\alpha$$

y la integral es:

$$\varepsilon = \oint(v \times B).dr = \int_0^d vB\cos\alpha B co = vB\cos\alpha B = at\ B\cos\alpha\ d$$

Un esquema eléctrico del problema se encuentra en la figura 4.

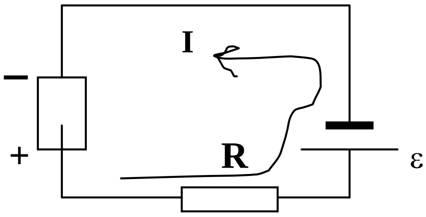


Fig. 4

La intensidad de la corriente I es constante. R es la resistencia de los raíles y es variable ya que a medida que la barra desciende aumenta la longitud de éstos. Dado que partimos sin velocidad inicial el descenso de la barra viene dado por :

$$s = \frac{1}{2}at^2 = L$$

siendo L la longitud de cada raíl y como son dos

$$R = \rho 2L = \rho at^2$$

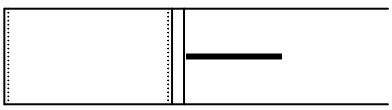
El valor de ε es variable, por tanto, la fuerza electromotriz del generador dependerá del tiempo.
Aplicamos la ley de Ohm generalizada al circuito de la figura 4

$$I = \frac{\sum \varepsilon}{\sum R} = \frac{\varepsilon_{fuente} - \varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon_{fuente} - atB\cos\alpha\ d}{\rho at^2} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{fuente} = \rho at^2 I + atB\cos\alpha\ d$$

Si se sustituyen los valores numéricos se obtiene:

$$\varepsilon_{fuente} = 0{,}006 * 3 * 1{,}36 * t^2 + 3 * 0{,}05 * \cos 30 * 0{,}2t = 0{,}025t^2 + 0{,}026t$$

36.- Un pistón de masa m = 5 g se puede deslizar sin rozamiento por un cilindro que no es conductor del calor ni de la electricidad. Dentro del cilindro existe gas helio cuya permitividad eléctrica se puede considerar igual a la del vacío



La pared del pistón que está en contacto con el gas helio es metálica y tiene una carga +Q y el fondo del cilindro una carga menos Q por lo que

existe entre ellas una fuerza de atracción semejante a la que existe entre las armaduras de un condensador plano.
El pistón ejecuta oscilaciones de muy pequeña amplitud y periodo T = 0,3 s. Estas oscilaciones se producen a partir de una posición de equilibrio de fuerzas, siendo entonces el volumen del helio V_o = 0,1 Ly su presión p_E. Calcular la carga Q.

Datos: γ ***=5/3 para el helio ,*** $\dfrac{1}{4\pi\ \varepsilon_o} = 9.10^9\ \dfrac{Nm^2}{C^2}$

Sobre el pistón actúan dos fuerzas antagónicas: una, la atracción eléctrica entre las superficies cargadas y otra, la resultante de la presión del gas sobre la superficie S del pistón.
Primero vamos a calcular la fuerza eléctrica teniendo en cuenta que el sistema se puede asimilar a un condensador plano cuyas armaduras llevan cargas +Q y –Q respectivamente.

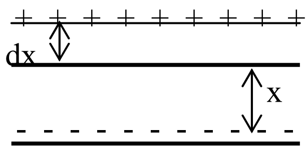


Fig. 1

Supongamos que aplicando una fuerza F separamos las placas una distancia dx tal como se ve en la figura 1. Esto supone realizar un trabajo por parte nuestra de valor

$$dW = F\ dx$$

Este trabajo se traduce en un aumento de la energía del condensador. La energía de un condensador es:

$$E = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 x}{\varepsilon_o S}$$

siendo x la distancia entre las armaduras y S la superficie de una de ellas

El aumento de energía del condensador es:

$$dE = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_o S}dx = Fdx \quad \Rightarrow \quad F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_o S}$$

Volviendo al problema, tenemos que cuando las fuerzas antagónicas sean iguales la presión que ejerce el gas sobre el pistón la designamos por p_E y por tanto, la fuerza del gas es p_E*S, siendo S la superficie del pistón. Como existe equilibrio de fuerzas

$$p_E * S = \frac{Q^2}{2\varepsilon_o S} \quad \Rightarrow \quad p_E = \frac{Q^2}{2\varepsilon_o S^2}$$

Las oscilaciones se producen a partir de la posición en que las fuerzas antagónicas son iguales
x_o es la distancia del fondo del cilindro al pistón $Sx_o = V_o$,el gas ejerce la presión p_E

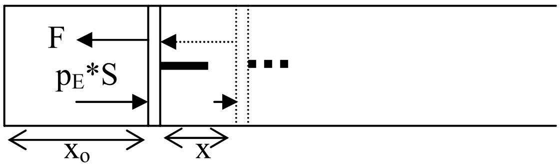


Fig. 2

Si el pistón se desplaza hacia la derecha x (fig. 2), la presión del gas es menor que p_E y la fuerza eléctrica es mayor que la que ejerce el gas, por tanto, el pistón se desplaza hacia la posición de equilibrio, si por el contrario, el pistón se desplaza x a la izquierda , entonces la presión del gas es mayor que p_E y, por tanto, la fuerza que ejerce el gas es mayor que la eléctrica y eso hace que vuelva a la posición de equilibrio.

En definitiva, cuando el pistón se separa de su posición de equilibrio aparece una fuerza resultante que tiende a llevarlo a dicha posición y de este modo se pueden producir las oscilaciones.

Supongamos que el pistón se encuentra en la posición x a la derecha de x_o. Las fuerzas que actúan sobre él son:

hacia la izquierda la fuerza eléctrica $F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_o S}$

hacia la derecha la fuerza debida a la presión del gas que ahora vale $p < p_E$

Si las paredes no conducen el calor podemos admitir que el proceso es adiabático

$$p_E * (Sx_o)^\gamma = p * [S(x_o + x)]^\gamma \quad \Rightarrow \quad p = \frac{p_E}{\left(1 + \frac{x}{x_o}\right)^\gamma}$$

La fuerza resultante sobre el pistón es:

$$\frac{Q^2}{2\varepsilon_o S} - \frac{p_E}{\left(1 + \frac{x}{x_o}\right)^\gamma} * S$$

El desarrollo del paréntesis es $\left(1+\frac{x}{x_o}\right)^{\gamma} = 1+\gamma\frac{x}{x_o}+......$

$$\frac{Q^2}{2\varepsilon_o S} - \frac{p_E}{\left(1+\frac{x}{x_o}\right)^{\gamma}} * S = \frac{Q^2}{2\varepsilon_o S} - \frac{Q^2}{2\varepsilon_o S^2}\frac{1}{1+\gamma\frac{x}{x_o}} * S = \frac{Q^2}{2\varepsilon_o S}\left[1-\frac{1}{1+\gamma\frac{x}{x_o}}\right] = \frac{Q^2}{2\varepsilon_o S}\left[\frac{\gamma\frac{x}{x_o}}{1+\gamma\frac{x}{x_o}}\right]$$

Si x es muy pequeño comparado con x_o podemos aproximar $1+\gamma\frac{x}{x_o}\approx 1$, y con esta aproximación la fuerza resultante vale:

$$\frac{Q^2}{2\varepsilon_o S}\frac{\gamma}{x_o}x = Kx$$

Esto significa que al ser la fuerza directamente proporcional a la elongación x, se trata de un movimiento armónico de periodo T y valor

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{m2\varepsilon_o S x_o}{Q^2\gamma}} = 2\pi\sqrt{\frac{2m\varepsilon_o V_o}{Q^2\gamma}}$$

despejando Q

$$Q = \frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{2m\varepsilon_o V_o}{\gamma}} = \frac{2\pi}{0,3}\sqrt{\frac{2*5.10^{-3}*\frac{1}{4\pi*9.10^{9}}*0,1*10^{-3}}{\frac{5}{3}}} = 4,8.10^{-8}\ \text{C}$$