# Calor I

***1.- Un termómetro de resistencia consiste en una hélice de hilo delgado de platino . Si se conoce el coeficiente de temperatura del platino es posible determinar la temperatura de los alrededores de la hélice de platino midiendo su resistencia eléctrica. Al pasar corriente por el hilo de platino da lugar a su calentamiento y esto constituye una fuente de error. Para investigar este problema se ha medido la tensión e intensidad de la corriente en un hilo de platino manteniendo constante la temperatura de los alrededores. Los resultados están en la tabla siguiente :***

| I/mA | 2,000 | 3,000 | 4,000 | 5,000 | 6,000 | 7,000 | 8,000 | 9,000 | 10,000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| U/ mV | 2201 | 3302 | 4408 | 5514 | 6624 | 7736 | 8859 | 9982 | 11109 |

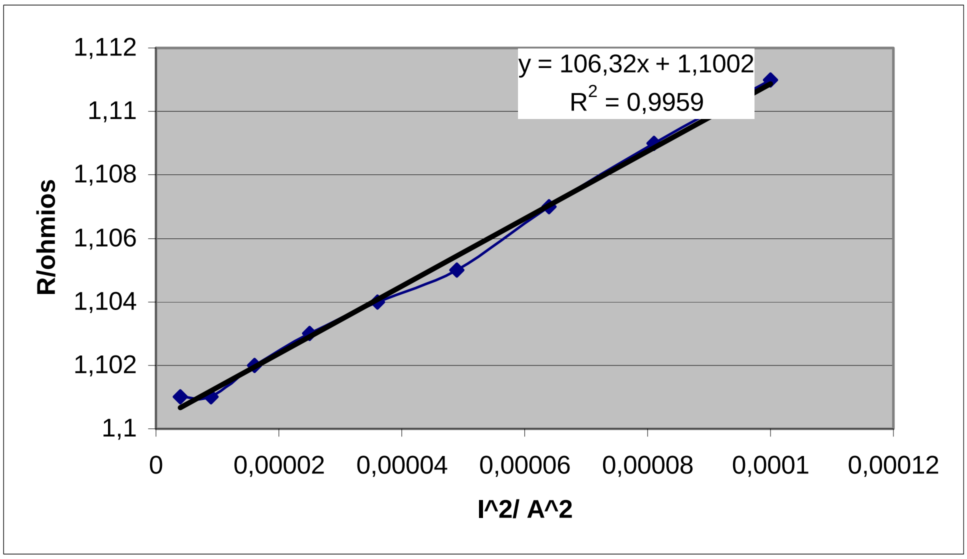
***Determinar la dependencia entre la resistencia de la hélice y la intensidad de la corriente.***

La resistencia de un metal es función de la temperatura mediante la formula $R = Ro[1+\alpha(t-t_o)]$ (1), donde R es la resistencia del hilo de platino a una temperatura t y Ro a la temperatura de referencia. Por tanto, conocido Ro, $\alpha$ y la temperatura de referencia se puede calcular t.
La resistencia de la hélice de platino se calcula dividiendo el voltaje U( en voltios) entre la intensidad en amperios.

Tabla 1

| $I*10^3/A$ | 2,000 | 3,000 | 4,000 | 5,000 | 6,000 | 7,000 | 8,000 | 9,000 | 10,000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $U*10^{-6}/V$ | 2201 | 3302 | 4408 | 5514 | 6624 | 7736 | 8859 | 9982 | 11109 |
| $R/\Omega$ | 1,101 | 1,101 | 1,102 | 1,103 | 1,104 | 1,105 | 1,107 | 1,109 | 1,111 |

La tabla indica que la resistencia del hilo de platino crece paulatinamente a medida que lo hace la intensidad de la corriente que circula por ella. La resistencia crece a medida que pasa la corriente por la hélice ya que se genera energía térmica y por tanto el hilo está a una temperatura ligeramente superior a la de los alrededores, o en otras palabras existe un gradiente de temperatura $\Delta t$ entre el hilo y el ambiente . Ahora cabe la duda de que R hay que escoger para aplicar la fórmula (1). Cuando $\Delta t \to 0$, quiere decir que la temperatura del hilo y la del ambiente son iguales y por conseguiente hay que escoger ese valor de R . Como el calor generado en el hilo es, de acuerdo con el efecto Joule proporcional al cuadrado de la intensidad, representamos los valores de la resistencia de la tabla 1 frente al cuadrado de la intensidad

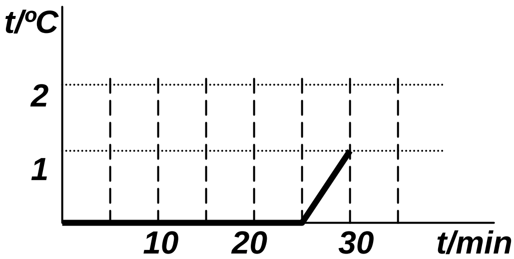



La relación entre la resitencia y la intensidad de corriente es :

$$R = 1{,}100 + 106\ I^2$$

Cuando la intensidad de corriente por el hilo tiende a cero, el calor generado tenderá a cero y por consiguiente $\Delta t \to 0$ y en este caso la temperatura del hilo y la del ambiente son iguales. Hemos de aplicar la fórmula (1) utilizando como valor de R = 1,100 Ω.

***2.- Un contenedor metálico contiene una mezcla de agua y hielo siendo la masa 20 kg. El contenedor se coloca en una habitación en el instante t=0. Se registra a partir de ese instante la temperatura del agua del contenedor y la gráfica de los datos obtenidos están recogidos en la figura inferior***




***Calcular la masa de hielo que existía en el contenedor en el instante inicial.***

La gráfica nos dice que durante 25 minutos la temperatura del agua no ha cambiado debido a que existía durante todo ese tiempo en equilibrio el hielo y el agua líquida. En
otras palabras durante ese tiempo el contendor ha recibido energía térmica desde el exterior que se ha empleado en fundir el hielo. A los 25 minutos todo el hielo se ha fundido y el calor recibido se emplea en calentar la masa total del agua.

De la gráfica se deduce que la rapidez de aumento de la temperatura del agua es $\frac{1}{5}\frac{^{o}C}{min}$ y la cantidad de calor recibida por unidad de tiempo es:

$$Q = mc\ \Delta t = 20kg * 4200\frac{J}{kg.^{o}C} * \frac{1}{5}\frac{^{o}C}{min} = 16{,}8.10^{3}\ \frac{J}{min}$$

La energía recibida por el contenedor durante 25 minutos se ha empleado en fundir la masa de hielo.

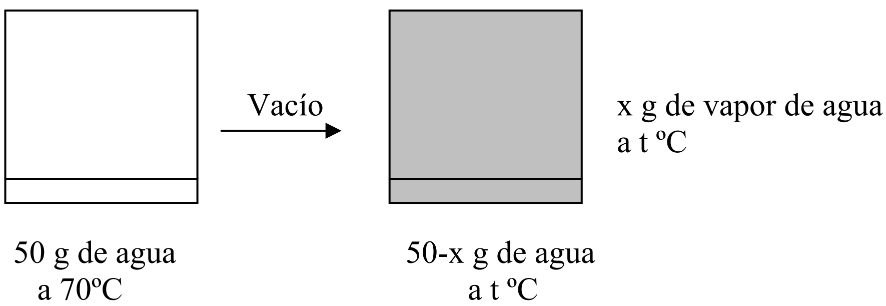
$$16{,}8.10^{3} * 25 = m * 3{,}2.10^{5} \quad \Rightarrow \quad m = 1{,}3\ \ kg\ \ de\ \ hielo$$

este problema se ha resuelto con una serie de suposiciones a) que la masa del contenedor es nula b) que no absorbe calor c) que la transmisión del calor es uniforme y constante en todo el intervalo de tiempo.

***3.-Un recipiente aislado térmicamente del exterior está dividido en dos partes separadas entre sí por una pared. Una contiene 50 g de agua a la temperatura de 70ºC y la otra consiste en un volumen de 200 L donde existe el vacío. Si se elimina la pared y se ponen en contacto las dos partes del recipiente, calcular la temperatura de equilibrio que se alcanza.***
***Datos calor especifico del agua 4,19 J/gK***
***Calor latente de vaporización del agua 2400 J/g***
***Presión del vapor de agua***

| t/ºC | 5 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 50 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P/kPa | 0,87 | 1,71 | 2,34 | 3,17 | 4,25 | 5,62 | 7,38 | 12,3 | 19,9 |

Al poner en contacto las dos partes del recipiente, x gramos del agua líquida pasarán al estado de vapor absorbiendo 2400 x julios de energía. Dado que el recipiente está aislado la energía del proceso de vaporización proviene del enfriamiento del agua, cuya temperatura pasa a ser t º C




El vapor de agua está en equilibrio con el agua líquida a la temperatura de t º C

$$(50-x)4{,}19.(70-t) = x\ 2400$$

$$p.200 = (\ x/18)0{,}082\ (\ 273 + t)$$

Si suponemos una temperatura de equilibrio, la primera ecuación nos da el valor de x y la segunda el valor de p, si este coincide con el de las tablas la suposición es correcta.

| t/ºC | x/g | p /kPa | | p de la tabla |
|---|---|---|---|---|
| 40ºC | 2,49 | 1,80 | < | 7,38 |
| 30ºC | 3,26 | 2,28 | < | 4,25 |
| 20ºC | 4,01 | 2,71 | > | 2,34 |
| 15ºC | 4,38 | 2,91 | > | 1,71 |
| 22ºC | 3,87 | 2,63 | | 2,68 ( por interpolación en la tabla) |
| 23ºC | 3,80 | 2,53 | | 2,85 |

***4.- Dos recipientes contienen un litro de agua cada uno, a las temperaturas de 100ºC y 10ºC respectivamente a) Describir un método mediante el cual el agua fría se pueda calentar a más de 55ºC b) Determinar la máxima temperatura a la que se puede calentar el agua fría. Se supone que usted puede usar cualquier número de recipientes y que las pérdidas de calor con el exterior son nulas.***

Si ponemos en contacto toda el agua fría con toda el agua caliente, sin perdidas con el ambiente, el resultado es que los dos recipientes terminan por alcanzar una temperatura de equilibrio de 55ºC

$$1000.\ Ce.(100-t) = 1000\ Ce(t-10) \quad ;\ t = 55ºC$$

Este es un proceso irreversible en donde existe un gradiente claro de temperatura entre los dos recipientes.
Cabe la posibilidad de dividir el agua caliente en fracciones e ir calentando el agua fría con cada una de ellas. Este proceso sería irreversible pero los gradientes de temperatura irán disminuyendo. Supongamos que los 1000 gramos de agua caliente lo dividimos en cuatro recipientes de 250 g, cada uno a 100ºC. Ponemos en contacto el primer recipiente con los 1000 gramos de agua a 10ºC y esperamos a que se alcance el equilibrio. Una vez alcanzado el equilibrio ponemos los 1000 g de agua en contacto con el segundo recipiente y esperamos a que se alcance el equilibrio y esto lo repetimos otras dos veces más. Los cálculos son los siguientes

$$1)\ 250\ .\ Ce\ (100-t) = 1000\ Ce(t-10) \quad ;\ t = 28\ ºC$$

$$2)\ 250\ .\ Ce\ (100-t) = 1000\ Ce\ (t-28) \quad ;\ t = 42{,}4ºC$$

$$3)\ 250\ .\ Ce\ (100-t) = 1000\ Ce\ (t-42{,}4) \quad ;\ t = 53{,}9ºC$$

$$4)\ 250\ .\ Ce\ (100-t) = 1000\ Ce\ (t-53{,}9) \quad ;\ t = 63{,}1ºC$$

Vamos a generalizar este procedimiento. Designamos a N el número de partes en que dividimos el agua caliente, x la temperatura de cada proceso. Si N =2 resulta:

$$m = 1000/N = 500\ g \quad ;\ 500.\ Ce\ .\ (100-t_1) = 1000.Ce.(t_1-10)$$

$$t_1 = \frac{100*500+1000*10}{1500} = 40º\,C \ ;\ t_2 = \frac{100*500+1000*40}{1500} = 60º\,C$$

De las dos expresiones anteriores se puede generalizar:

$$t_x = \frac{100 * \frac{1000}{N} + 1000 * t_{x-1}}{1000 + \frac{1000}{N}}, \quad x = 1,2,3........N \quad (1) \qquad \text{, cuando } x = 1 \text{ , } \quad t_{x-1} = 10ºC$$

Con una hoja de cálculo o con un programa Basic se puede dar valores altos a N y obtener el valor de la temperatura final. Este valor parece tender a una temperatura comprendida entre 66,8ºC y 66,9º

Con una hoja de cálculo se obtienen los siguientes valores

| | |
|---|---|
| N =40 | $t_{40}$ = 66,48 |
| N=100 | $t_{100}$= 66,72 |
| N=1000 | $t_{1000}$ = 66,87 |
| N=10 000 | $t_{10\,000}$ = 66,88919 |
| N=50 000 | $t_{50\,000}$ = 66,8905 |

Es posible calcular el límite de la expresión

$$t_x = \frac{100 * \frac{1000}{N} + 1000 * t_{x-1}}{1000 + \frac{1000}{N}}, \quad x = 1,2,3........N \qquad \text{cuando } x = 1 \text{ , } t_{x-1} = 10ºC$$

$$\text{Si } N=5 \quad ; \quad t_1 = \frac{\frac{10^5}{5} + 10^3 * 10}{10^3\left(1 + \frac{1}{5}\right)}$$

$$t_2 = \frac{\dfrac{10^5}{5} + 10^3 \left[ \dfrac{\dfrac{10^5}{5} + 10^3 * 10}{10^3\left(1+\dfrac{1}{5}\right)} \right]}{10^3\left(1+\dfrac{1}{5}\right)} = \frac{10^2}{5\left(1+\dfrac{1}{5}\right)} + \frac{\dfrac{10^5}{5} + 10^3 * 10}{10^3\left(1+\dfrac{1}{5}\right)^2} = \frac{10^2}{5\left(1+\dfrac{1}{5}\right)} + \frac{10^2}{5\left(1+\dfrac{1}{5}\right)^2} +$$

$$+ \frac{10}{\left(1+\dfrac{1}{5}\right)^2}$$

$$t_3 = \frac{\dfrac{10^5}{5} + 10^3 \left[ \dfrac{10^2}{5\left(1+\dfrac{1}{5}\right)} + \dfrac{10^2}{5\left(1+\dfrac{1}{5}\right)^2} + \dfrac{10}{\left(1+\dfrac{1}{5}\right)^2} \right]}{10^3\left(1+\dfrac{1}{5}\right)} = \frac{10^2}{5\left(1+\dfrac{1}{5}\right)} + \frac{10^2}{5\left(1+\dfrac{1}{5}\right)^2} +$$

$$\frac{10^2}{5\left(1+\dfrac{1}{5}\right)^3} + \frac{10}{\left(1+\dfrac{1}{5}\right)^3}$$

$$\boldsymbol{t}_4 = \frac{\dfrac{10^5}{5} + 10^3 \left[ \dfrac{10^2}{5\left(1+\dfrac{1}{5}\right)} + \dfrac{10^2}{5\left(1+\dfrac{1}{5}\right)^2} + \dfrac{10^2}{5\left(1+\dfrac{1}{5}\right)^3} + \dfrac{10}{\left(1+\dfrac{1}{5}\right)^3} \right]}{10^3\left(1+\dfrac{1}{5}\right)} =$$

$$= \frac{10^2}{5\left(1+\dfrac{1}{5}\right)} + \frac{10^2}{5\left(1+\dfrac{1}{5}\right)^2} + \frac{10^2}{5\left(1+\dfrac{1}{5}\right)^3} + \frac{10^2}{5\left(1+\dfrac{1}{5}\right)^4} + \frac{10}{\left(1+\dfrac{1}{5}\right)^4}$$

De la secuencia anterior se puede deducir que si en vez de N=5 hacemos N=N resulta:

$$t_N = \underline{\frac{10^2}{N\left(1+\dfrac{1}{N}\right)} + \frac{10^2}{N\left(1+\dfrac{1}{N}\right)^2} + \frac{10^2}{N\left(1+\dfrac{1}{N}\right)^3} + \cdots\cdots + \frac{10^2}{N\left(1+\dfrac{1}{N}\right)^N}} \quad + \quad \frac{10}{\left(1+\dfrac{1}{N}\right)^N} \quad (1)$$

Los términos subrayados forman una sucesión geométrica de razón $r = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{N}}$

La suma de todos los términos es: $S = \dfrac{a\ r^N - a}{r-1}$ siendo a el primer término

$$S = \frac{\dfrac{10^2}{N\left(1+\dfrac{1}{N}\right)} * \left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{N}}\right)^N - \dfrac{10^2}{N\left(1+\dfrac{1}{N}\right)}}{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{N}} - 1} = \frac{\dfrac{10^2}{N\left(1+\dfrac{1}{N}\right)}\left[\left[\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{N}\right)}\right]^N - 1\right]}{\dfrac{1-1-\dfrac{1}{N}}{1+\dfrac{1}{N}}} =$$

$$= \frac{10^2 N\left(1+\dfrac{1}{N}\right)\left(1-\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{N}\right)^N}\right)}{N\left(1+\dfrac{1}{N}\right)} \quad \Rightarrow \quad S = 10^2\left(1-\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{N}\right)^N}\right)$$

La expresión (1) queda de la forma

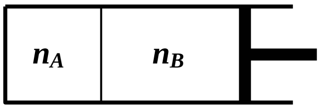
$$t_N = 10^2\left(1-\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{N}\right)^N}\right) + \frac{10}{\left(1+\dfrac{1}{N}\right)^N}$$

Si N tiende a infinito $10^2\left(1-\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{N}\right)^N}\right) \Rightarrow 10^2\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$ ; $\dfrac{10}{\left(1+\dfrac{1}{N}\right)^N} \Rightarrow \dfrac{10}{e}$

Por tanto:

$$t_N = 10^2\left(1-\frac{1}{e}\right) + \frac{10}{e} = 100 - \frac{90}{e} = 100 - \frac{90}{2{,}7182818} = 66{,}89085$$

***5.- En el dispositivo de la figura inferior existen $n_A$= 0,5 moles de gas A cuyo calor específico a volumen constante vale $C_{V(A)}$ = 12,47 $J.mol^{-1}.K^{-1}$ y $n_B$ = 0,7 moles de gas B de calor específico $C_{V(B)}$ = 21,06 $J.mol^{-1}.K^{-1}$.***




***Ambos gases están separados mediante un tabique que puede moverse sin rozamiento. La temperatura y presión inicial de los gases es 300 K y $p_o$, respectivamente. Los gases se comprimen mediante el pistón que se desplaza de derecha a izquierda de forma muy lenta, hasta que la temperatura alcance un valor de 348 K. Se admite que las paredes del dispositivo y el pistón son impermeables al calor y que el tabique de separación permite el paso del calor y no absorbe nada del mismo. Calcular el calor que fluye a través del tabique y el sentido en qué lo hace.***

Una vez que los gases han sido comprimidos, se encontrarán a la misma temperatura y presión. La variación de energía interna de cada gas se puede calcular mediante la expresión

$$\Delta U_A = n_A C_{v(A)}\ \Delta T = 0{,}5\text{mol} * 12{,}47 \frac{J}{\text{mol.K}}.48K = 299{,}3\ \ J$$

$$\Delta U_B = n_B C_{v(B)}\ \Delta T = 0{,}7\text{mol} * 21{,}06 \frac{J}{\text{mol.K}}.48K = 707{,}6\ \ J$$

Teniendo en cuenta que el sistema en su conjunto está aislado del exterior no existe intercambio de calor Q = 0 y ,por tanto, es una transformación adiabática

$$\Delta U_{total} = \Delta U_A + \Delta U_B = Q + W_{total} \quad \Rightarrow \quad 1007\ \ J = W_{total} = W_A + W_B \quad (1)$$

Como el desplazamiento del pistón se hace de forma muy lenta, los dos gases se encuentran en equilibrio de presión y temperatura durante cualquier instante de la transformación.
Aplicamos la ley de los gases perfectos en el estado inicial

$$pV_{iA} = n_A RT; pV_{iB} = n_B RT \quad \Rightarrow \quad \frac{V_{iA}}{V_{iB}} = \frac{n_A}{n_B}$$

Cuando los gases se han comprimido los volúmenes serán:

$$v_A = V_{iA} - \Delta V_A \quad ; \quad v_B = V_{iB} - \Delta V_B$$

siendo sus presiones($p_1$) y temperaturas($T_1$) iguales.

$$p_1 * (V_{iA} - \Delta V_A) = n_A RT_1 \quad ; \quad p_1 * (V_{iB} - \Delta V_B) = n_B RT_1$$

Dividiendo miembro a miembro las dos últimas ecuaciones:

$$\frac{V_{iA} - \Delta V_A}{V_{iB} - \Delta V_B} = \frac{n_A}{n_B} = \frac{V_{iA}}{V_{iB}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta V_A}{\Delta V_B} = \frac{n_A}{n_B}$$

El trabajo de compresión de los gases , cuando la disminución de volumen es pequeña

$$W_A = p_1 \Delta V_A \quad ; \quad W_B = p_1 \Delta V_B \qquad \Rightarrow \qquad \frac{W_A}{W_B} = \frac{\Delta V_A}{\Delta V_B} = \frac{n_A}{n_B} \quad (2)$$

Combinado las ecuaciones (1) y (2) resulta:

$$W_A = 419{,}6 \text{ J} \qquad ; \qquad W_B = 587{,}4 \text{ J}$$

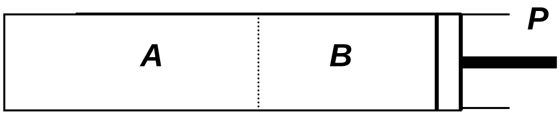
A cada gas aplicamos el primer principio de la termodinámica

$$299{,}3 = Q_A + 419{,}6 \qquad \Rightarrow \qquad Q_A = -120{,}3 \text{ J}$$

$$707{,}6 = Q_B + 587{,}4 \qquad \Rightarrow \qquad Q_B = -120{,}3 \text{ J}$$

El gas A pierde calor que es ganado por el gas B.

***6.- Un cilindro está provisto de un pistón móvil y de una membrana semipermeable, tal como indica la figura inferior***

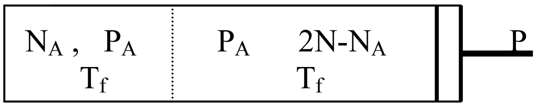



***Al lado izquierdo de la membrana existe un gas perfecto monoatómico A y al lado derecho un gas perfecto diatómico B. El sistema inicialmente está en equilibrio debido a la presión exterior P que actúa sobre el émbolo. Ambos gases se encuentran inicialmente a la presión P, ocupan el mismo volumen y están a la misma temperatura $T_o$ = 300 K. La membrana permite solamente el paso del gas A hacia el B.***
***Las paredes del cilindro ni las del pistón permiten el paso del calor, en cambio la membrana sí lo permite. Cuando después de un tiempo se alcance una situación estable determinar la temperatura de los gases.***

El proceso que ocurre es el paso de moléculas del gas A hacia el B, al mismo tiempo que el pistón se desplaza hacia la derecha. El paso de moléculas de A a B se detendrá cuando la presión en el lado izquierdo del gas A y la presión parcial del gas A en el lado derecho sean iguales. En esas condiciones el pistón se ha desplazado un volumen $\Delta V$ . El gas B se encontrará a la temperatura $T_f$ y a esa misma temperatura se encontrará el gas que queda en A, ya que la membrana permite el paso del calor.
En conjunto el proceso es adiabático ya que las paredes no permiten el paso de calor.

Inicialmente N representa el número de moles del gas A igual al B, puesto que ambos gases se encuentran a la misma presión volumen y temperatura.

Cuando se alcance el equilibrio en el lado izquierdo hay $N_A$ moles de A y han pasado $N-N_A$ al lado derecho . En este lado existe N moles de B y $N-N_A$ moles de A y el volumen es $V + \Delta V$




| *Lado izquierdo* | *Lado derecho* |
|---|---|
| Volumen = Volumen inicial = V | Volumen = V + $\Delta$V |
| Presión = $P_A$ | Presión total = P |
| Temperatura $T_f$ | Presión parcial del gas A = $P_A$ |
| Número de moles $N_A$ | Temperatura = Tf |
| | Número total de moles =2N-$N_A$ |

El proceso global es adiabático, luego: $\Delta U = Q+W = -P\Delta V$

Para calcular $\Delta U$ tenemos en cuenta que entre el principio y el final el gas A pasa de $T_o$ a $T_f$ y lo mismo le sucede al gas B.
Teniendo en cuenta que un gas es monoatómico y el otro diatómico

$$C_A = \frac{3}{2}R \qquad \text{y} \qquad C_B = \frac{5}{2}R$$

$$\Delta U = NC_A(T_f - T_o) + NC_B(T_f - T_o) = (T_f - T_o)(C_A + C_B)N = 4RN(T_f - T_o)$$

En el estado inicial $\quad PV = NRT_o \; (1)$

En el estado final alcanzado el equilibrio

$$P_A V = N_A RT_f \;\; (2) \quad ; P_A(V + \Delta V) = (N - N_A)RT_f \;\; (3) \quad ; P(V + \Delta V) = (2N - N_A)RT_f \; (4)$$

Combinando las ecuaciones (1) y (2) $\quad \frac{P_A}{P} = \frac{N_A T_f}{NT_o} \qquad (5)$

Combinando las ecuaciones (3) y (4) $\quad \frac{P_A}{P} = \frac{N - N_A}{2N - N_A} \quad (6)$

Combinando las ecuaciones (5) y (6) $\frac{N - N_A}{2N - N_A} = \frac{N_A T_f}{NT_o} \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - \frac{N_A}{N}}{2 - \frac{N_A}{N}} = \frac{T_f \frac{N_A}{N}}{T_o} \quad (7)$

A partir de la ecuación (4) y teniendo en cuenta la (1)

$$PV + P\;\Delta V = 2NRT_f - N_A RT_f \quad \Rightarrow \quad P\;\Delta V = T_f R(2N - N_A) - NRT_o$$

dado que $\quad \Delta U = -P\;\Delta V$

$$4RN(T_f - T_o) = -[T_f R(2N - N_A) - NRT_o] \quad \Rightarrow \quad 4(T_f - T_o) = -T_f\left(2 - \frac{N_A}{N}\right) + T_o \; (8)$$

vamos a designar a $\frac{N_A}{N} = x$. Las ecuaciones (7) y (8) quedan así

$$\frac{1-x}{2-x} = \frac{xT_f}{T_o} \quad (9) \qquad ; \qquad 4(T_f - T_o) = T_o - 2T_f + xT_f \;\Rightarrow\; T_f(6+x) = 5T_o \quad (10)$$

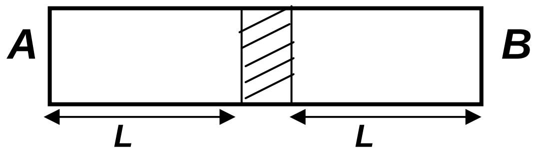
Combinando las ecuaciones (9) y (10) resulta:

$$\frac{1-x}{2-x} = \frac{5x}{6+x} \qquad \Rightarrow \qquad 6x^2 - 17x + 6 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0{,}413$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (9)

$$\frac{1-0{,}413}{2-0{,}413} = 0{,}413\frac{T_f}{300} \qquad \Rightarrow \qquad T_f = 269\ \text{K}$$

***7.- Un cilindro de sección constante S, consta de un pistón móvil sin rozamiento, que inicialmente divide su volumen en dos partes iguales A y B , tal como indica la figura inferior***




***Tanto en la parte A como en la B existe la misma cantidad del mismo gas, a la presión $P_o$ y a la misma temperatura. Si el pistón se separa de la posición de equilibrio una pequeña distancia x y se deja en libertad se produce un movimiento armónico . Calcular el periodo de vibración a ) si el proceso es isotérmico b) si es adiabático.***

Si el pistón se separa de su posición de equilibrio una distancia x hacia la izquierda, el volumen y presión del gas de la cavidad A es S ( L-x) y $P_1$ y el de la cavidad B: S(L+x) y $P_2$.

La fuerza que sobre el pistón ejerce el gas A es $P_1$*S dirigida de izquierda a derecha y la que ejerce el gas B es $P_2$*S dirigida de derecha hacia la izquierda., La fuerza neta resultante sobre le pistón es:

$$F = P_1 * S - P_2 * S = S(P_1 - P_2)$$

Mediante la ecuación de los gases perfectos relacionamos las presiones con las condiciones iniciales ( a temperatura constante).

$$\frac{P_o(SL)}{T_o} = \frac{P_1S(L-x)}{T_o} = \frac{P_2S(L+x)}{T_o}$$

$$F = S\left[\left(\frac{P_oL}{L-x}\right)-\left(\frac{P_oL}{L+x}\right)\right] = SP_oL\left[\frac{L+x-(L-x)}{L^2-x^2}\right] \approx SP_oL\frac{2x}{L^2}$$

Se ha hecho la aproximación de que $x^2$ es mucho menor que $L^2$.

La fuerza es directamente proporcional a la elongación x , por tanto el periodo es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{mL}{2SP_o}}$$

En el caso de que el proceso sea adiabático la relación entre la situación inicial y cuando el pistón esté separado una distancia de la posición de equilibrio es la siguiente:

$$P_o(SL)^\gamma = P_1[S(L-x)]^\gamma = P_2[S(L+x)]^\gamma$$

La fuerza neta sobre el pistón es:

$$F = S(P_1 - P_2) = S\left[\frac{P_oL^\gamma}{(L-x)^\gamma} - \frac{P_oL^\gamma}{(L+x)^\gamma}\right] = SP_oL^\gamma\left[\frac{(L+x)^\gamma - (L-x)^\gamma}{(L^2-x^2)^\gamma}\right]$$

Hacemos la aproximación $L^2 - x^2 \approx L^2$ y desarrollamos los siguientes términos:

$$(L+x)^\gamma = L^\gamma + \gamma L^{\gamma-1}x \qquad ; \qquad (L-x)^\gamma = L^\gamma - \gamma L^{\gamma-1}x$$

$$F = SP_oL^\gamma\left[\frac{L^\gamma + \gamma L^{\gamma-1}x \text{ - } L^\gamma + \gamma L^{\gamma-1}x}{L^{2\gamma}}\right] = \frac{SP_o}{L^\gamma}2\gamma\ L^{\gamma-1}x = \frac{SP_o}{L}2\gamma\ x$$

Al ser la fuerza directamente proporcional a la elongación:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{mL}{2SP_o\gamma}}$$

***8.- Un recipiente de volumen $V_A$ = 10 L está conectado con otro B de volumen $V_B$ = 7 L mediante un tubo estrecho que contiene una válvula de apertura. El recipiente A contiene un gas a la presión $P_1 = 0{,}95.10^5$ Pa y a la temperatura $T_1$ = 290 K y en el B se ha hecho el vacío. La válvula permite solamente el paso de gas desde el recipiente A al B cuando la diferencia de presiones entre ambos gases sea $P_o = 1{,}06.10^5$ Pa. Si el gas contenido en ambos recipientes alcanza una temperatura $T_f$ = 440 K , calcular la presión del gas en el recipiente B.***

Al calentar el gas contenido en A aumenta su presión y cuando alcanza el valor $P_o$ se abre la válvula y al seguir calentando pasa gas de A a B . El limite del calentamiento ocurre cuando los gases alcanzan la temperatura $T_f$ y ya no pasará mas gas de A a B cuando la diferencia entre la presión del gas en A y la del B sea igual a Po.

Designamos con N al número de moles de gas inicialmente contenidos en A. $N_B$ los moles de gas contenidos al final del proceso en B, por tanto, $N-N_B$ son los moles que existen en A al final del proceso. $P_B$ representa la presión del gas en el recipiente B al final del proceso, la del recipiente A es $P_A$ y se cumplirá que $P_A-P_B = P_o$.

Aplicamos la ecuación de los gases perfectos en el instante inicial

$$P_1V_A = NRT_1 \qquad \Rightarrow \qquad N = \frac{P_1V_A}{RT_1} \quad (1)$$

Aplicamos la misma ecuación al final del proceso

$$P_AV_A = (N - N_B)RT_f \qquad \Rightarrow \qquad (P_o + P_B)V_A = (N - N_B)RT_f \quad (2)$$

$$P_BV_B = N_BRT_f \quad (3)$$

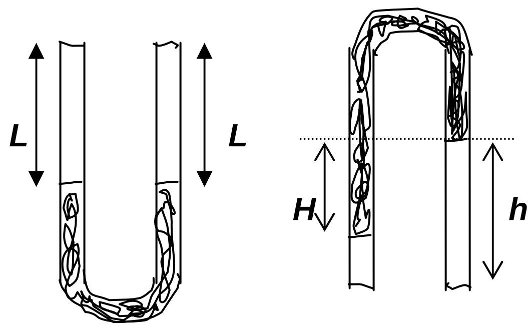
Combinando las ecuaciones (1) , (2) y (3)

$$P_0V_A + P_BV_A = \frac{P_1V_A}{RT_1}RT_f - P_BV_B \qquad \Rightarrow \qquad P_B = \frac{\frac{P_1V_A}{T_1}T_f - P_oV_A}{V_A + V_B}$$

Sustituyendo los valores numéricos resulta:

$$P_B = \frac{\frac{0{,}95.10^5 * 10.10^{-3} * 440}{290} - 1{,}06.10^5 * 10.10^{-3}}{17.10^{-3}} = 2{,}24.10^4 \ \text{Pa}$$

***9.- Un tubo en forma de U cerrado contiene la misma cantidad de gas a ambos lados de las columnas de mercurio, tal como indica la figura a). Si a partir de esa posición el tubo***




***a)*** ***b)***

***se invierte (figura b), la situación simétrica de a) puede convertirse en inestable y adquirir la situación b).***
***A partir de los siguientes datos : S sección del tubo , L altura de cada columna de gas en la posición a) , T temperatura del gas , n número de moles de gas en cada columna de gas en a) , ρ densidad del mercurio y g intensidad del campo gravitatorio, determinar que condición se debe cumplir para que suceda el estado b).***
***Se supone que el gas siempre se mantiene a la temperatura T.***

Para la situación a) escribimos la ecuación de los gases perfectos

$$P(S*L) = nRT \quad (1)$$

Para la situación b) designamos con $P_1$ la presión del gas situado a la izquierda y $P_2$ la del gas situado a la derecha.
Designamos con X la longitud total de la columna de mercurio. La altura m de la columna de gas de la izquierda en b) es : $X + 2L = X + h + m \;\Rightarrow\; m = 2L - h$ .

$$P_1\left[\left(S*(2L-h)\right)\right] = P_2 * (Sh) \quad \Rightarrow \quad P_1 * (2L-h) = P_2 h \qquad (2)$$

por otra parte la presión $P_1$ es igual a la $P_2$ más la presión que ejerce la columna de mercurio de altura H

$$P_1 = P_2 + \rho g H = P_2 + \rho g(h-m) = P_2 + \rho g(2h-2L) \;(3)$$

Combinando (2) y (3) .

$$P_1 * (2L-h) = \left[P_1 - 2\rho\; g(h-L)\right]\, h \quad \Rightarrow \quad P_1 * 2(L-h) = 2\rho\; g(L-h)\; h \,(4)$$

La relación entre la presión inicial (situación a)) P y P∘ es la siguiente:

$$P*(SL) = P_1\left[S(2L-h)\right] \quad \Rightarrow \quad P_1 = \frac{PL}{2L-h} = \frac{\frac{nRT}{SL}*L}{2L-h} = \frac{nRT}{S(2L-h)}$$

Esta última relación llevada a (4)

$$\frac{nRT}{S(2L-h)}=\rho gh \quad \Rightarrow \quad \frac{nRT}{S\rho\ g}=2Lh-h^2 \quad \Rightarrow \quad h^2-2Lh+\mu=0 \ \ (5)$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

$$h=\frac{2L\pm\sqrt{4L^2-4\mu}}{2}$$

Para que esta ecuación tenga soluciones reales se ha de cumplir que $L^2\geq\mu\geq\frac{nRT}{S\rho\ h}$

Cuando $L^2=\mu$ la solución es h =L , cuando $L^2>\mu$ entonces el valor de h>L. En el primer caso ( situación simétrica del mercurio) es un equilibrio inestable frente a la segunda solución( caso representado en la figura b) del enunciado), ya que en el primer caso el centro de gravedad del mercurio está a mayor altura que en el segundo.

***10.- Un acondicionador de aire absorbe aire a una temperatura $T_1$=288 K conteniendo 10 g de vapor de agua por $m^3$ de aire . Luego enfría este aire hasta una temperatura de $T_2$= 277 K condensándose parte del vapor de agua. Finalmente calienta el aire hasta una temperatura de $T_3$= 288 K y lo***



***lanza a la atmósfera con un caudal de 800 $m^3$/hora. Se admite que en los procesos de calentamiento y enfriamiento la presión se mantiene constante $P_o$ = 100 kPa y que el calor procedente de la condensación del agua se aprovecha íntegramente para calentar el aire. a) Calcular la masa de agua que existe por $m^3$ en el aire expelido por el acondicionador b) la potencia que deb suministrarse al mismo.***
***Datos.- Considerar al aire con un Cp = (7/2) R , el calor de vaporización del agua Qv =2,48.$10^6$ J/kg .La presión de vapor del agua en función de la temperatura vale :***

| ***T/K*** | ***273*** | ***278*** | ***283*** | ***288*** |
|---|---|---|---|---|
| ***p/kPa*** | ***0,61*** | ***0,87*** | ***1,23*** | ***1,70*** |

Tomamos como base de los cálculos 1 $m^3$ de aire a la entrada del acondicionador. Mediante un esquema representamos los procesos que ocurren

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $V_1$ = 1 $m^3$<br>Po = 100 kPa<br>n moles aire<br>10 g de vapor de agua<br>Pv1; $T_1$= 288 K | → | $V_2$<br>Po = 100 kPa<br>n moles de aire<br>x g de vapor de agua<br>Pv2 ; $T_2$ = 277 K | → | $V_3$<br>Po = 100 kPa<br>n moles de aire<br>x g de vapor de agua<br>Pv3 ; $T_3$ =298 K |

10-x gramos de agua líquida

Pv1 es la presión de vapor del agua en el aire de entrada y vale

$$Pv1*1=\frac{10}{18}RT_1=\frac{10}{18}*8{,}31*288=1{,}33.10^3\,Pa$$

Pv2 es la presión de vapor del agua en el aire enfriado. Dado que ese aire se ha enfriado y de él ha condensado parte del agua el aire está saturado de vapor de agua a la temperatura de 277 K y su valor lo calculamos por interpolación lineal en la tabla de valores del enunciado

$$\frac{278-273}{0{,}87-0{,}61}=\frac{277-273}{x}\quad\Rightarrow\quad x=0{,}21\quad\Rightarrow\quad Pv2=0{,}61+0{,}21=0{,}82\ \text{kPa}$$

Calculamos los moles de aire

$$(100-1{,}33)10^3*1=n*8{,}31*288\quad\Rightarrow\quad n=41{,}2\ \text{moles de aire}$$

Calculamos el volumen $V_2$

$$(100-0{,}82)10^3*V_2=41{,}2*8{,}31*277\quad\Rightarrow\quad V_2=0{,}956\ m^3$$

Calculamos los gramos de agua que existen en ese vapor de volumen $V_2$

$$0{,}82.10^3*0{,}956=\frac{x}{18}*8{,}31*277\qquad\Rightarrow\qquad x=6{,}13\ g$$

Han condensado 10-6,13 = 3,87 g de agua y quedan en el volumen $V_3$ aire expulsado al exterior 6,13 g de vapor de agua

Calculamos el volumen de aire $V_3$.

$$\left(100.10^3-Pv3\right)*V_3=41{,}2*8{,}31*298\qquad;\qquad Pv3*V_3=\frac{6{,}13}{18}*8{,}31*298$$

resolviendo el sistema de dos ecuaciones anteriores resulta:

$$Pv3 = 0{,}82\ \text{kPa}\quad y\quad V_3 = 1{,}029\ m^3$$

Como en el problema nos piden los gramos de vapor de agua por metro cúbico de aire expulsado resulta.

$$\frac{6{,}13}{1{,}029}*1=5{,}96\,\frac{\text{g de vapor de agua}}{m^3\ \text{de aire expulsado}}$$

b)Hacemos un balance de calor por $m^3$ de aire de absorbido que equivale a 1,029 $m^3$ de aire evacuado

Calor cedido al enfriarse n moles de aire

$$Q_1 = nCp\Delta C = 41{,}2\text{mol} * \left( \frac{7}{2} * 8{,}31 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \right) 11 \text{ K} = 1{,}318.10^4 \text{ J}$$

El vapor de agua al condensarse cede calor.

$$Q_2 = 3{,}87.10^{-3}\,\text{kg} * 2{,}48.10^6 \,\frac{\text{J}}{\text{kg}} = 0{,}96.10^4 \,\text{J}$$

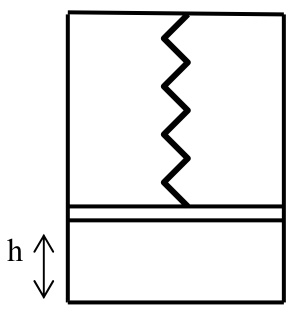
$Q_1+Q_2$ = $2{,}278.10^4$ J se emplean para calentar el aire desde la temperatura 277 K a 298 K. Calculamos cuánto calor se necesita para ello

$$Q_3 = nCp\Delta C = 41{,}2 * \left( \frac{7}{2} * 8{,}31 \right) * 21 = 2{,}516.10^4 \,\text{J}$$

Es preciso aportar $2{,}516.10^4 - 2{,}278.10^4 = 0{,}238.10^4$ J por cada $V_3$ =1,029 $m^3$ de aire expulsado. Puesto que el acondicionado expulsa 800 $m^3$/hora = 800/3600 $m^3$/s, se necesita aportar una potencia de

$$\frac{0{,}238.10^4\,\text{J}}{1{,}029\text{m}^3} = \frac{x}{\frac{800}{3600}\frac{\text{m}^3}{\text{s}}} \qquad \Rightarrow \qquad x = 514 \text{ W}$$

***11.- Un cilindro está cerrado por los dos extremos y en él se ha hecho el vacío. Un pistón, se supone que sin masa, ocupa la parte inferior del cilindro y está soldado a un muelle de constate elástica k, el cual cuando el pistón está junto a la parte inferior del cilindro está sin alargamiento. Por debajo del pistón se introduce una cierta cantidad de gas a la temperatura T con lo que una vez alcanzado el equilibrio el pistón se eleva hasta una altura h sobre el fondo ( ver la figura inferior)***




***Si se eleva la temperatura del gas hasta un valor $T_1$ determinar la nueva altura que alcanzará el pistón respecto de la base del cilindro.***

El pistón se encuentra en equilibrio debido a la fuerza que la presión del gas ejerce de abajo hacia arriba y la fuerza del muelle que actúa de arriba hacia abajo.

$$PS = kh$$

expresión en la que P es la presión del gas y S la superficie del pistón.
Al calentar el gas el pistón se estabiliza a una altura H >h y se cumplirá que:

$$P_1S = kH$$

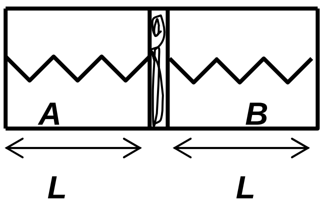
La relación entre los dos estados del gas es:

$$\frac{P*Sh}{T} = \frac{P_1*SH}{T_1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P}{P_1} = \frac{HT}{hT_1}$$

De las dos primeras ecuaciones se deduce:

$$\frac{P}{P_1} = \frac{kh}{kH} = \frac{HT}{hT_1} \qquad \Rightarrow \qquad H = h\sqrt{\frac{T_1}{T}}$$

***12.-Un cilindro se encuentra dividido en dos partes iguales de longitud L cada una mediante un pistón sin masa unido a dos muelles idénticos de constante k ( ver figura)***




***En dicha posición los muelles están sin estirar. A y B son dos gases que se encuentra a la misma presión $P_o$ y a la misma temperatura $T_o$ . Se eleva la temperatura del gas A hasta un valor $T_1$ y éso determina que dicho gas ocupe las 3/4 partes de todo el cilindro, mientras que el gas B permanece a la temperatura inicial $T_o$ ya que el pistón no conduce el calor. Determinar la temperatura $T_2$ que debe alcanzar el gas A para que ocupe las 7/8 partes de todo el cilindro.***

Al calentar el gas A desde $T_o$ a $T_1$ ocupa un volumen mayor que el inicial. La posición de equilibrio del pistón se debe a que el gas A ejerce una fuerza sobre el pistón de izquierda a derecha mientras que el gas B la ejerce de derecha a izquierda, además el muelle izquierdo esta estirado y ejerce una fuerza hacia la izquierda y el muelle izquierdo está comprimido y ejerce una fuerza también hacia la izquierda.

El gas A ocupa un volumen $S*\frac{3}{4}2L = S*\frac{3}{2}L$, siendo S la superficie del pistón.

El muelle izquierdo se ha estirado $\frac{3}{2}L - L = \frac{1}{2}L$ y es la misma longitud que se ha encogido el muelle derecho.

De la condición de equilibrio del pistón se deduce que:

$$P_A * S = P_B * S + 2\left(k * \frac{1}{2}L\right) = P_B * S + kL \quad (1)$$

Siendo $P_A$ la presión del gas A calentado a $T_1$ y $P_B$ la del gas B que está a la temperatura $T_o$ pero ocupando solamente un volumen $S * \frac{1}{2}L$

De acuerdo con la ecuación de los gases y para el gas A se cumple:

$$\frac{P_o(S * L)}{T_o} = \frac{P_A\left(S * \frac{3}{2}L\right)}{T_1} \quad \Rightarrow \quad P_A = \frac{2}{3}\frac{T_1}{T_o}P_o \quad (2)$$

y para el gas B

$$\frac{P_o(S * L)}{T_o} = \frac{P_B\left(S * \frac{1}{2}L\right)}{T_o} \quad \Rightarrow \quad P_B = 2P_o \quad (3)$$

Sustituimos las ecuaciones (2) y (3 ) en la (1)

$$\frac{2T_1P_o}{3T_o} * S = 2P_o * S + kl \quad \Rightarrow \quad P_oS\left(\frac{2T_1}{3T_o} - 2\right) = kL \quad (4)$$

Vamos a realizar los mismos cálculos pero ahora con el gas A calentado hasta la temperatura $T_2$ y ocupando un volumen que es las 7/8 partes del volumen total del cilindro

El gas A ocupa ahora un volumen $S * \frac{7}{8}2L = S * \frac{7}{4}L$, siendo S la superficie del pistón.

El muelle izquierdo de ha estirado $\frac{7}{4}L - L = \frac{3}{4}L$ y es la misma longitud que se ha encogido el muelle derecho.

De la condición de equilibrio del pistón se deduce que :

$$P_{AA} * S = P_{BB} * S + 2\left(k * \frac{3}{4}L\right) = P_{BB} * S + \frac{3}{2}kL \quad (5)$$

Siendo $P_{AA}$ la presión del gas A calentado a $T_2$ y $P_{BB}$ la del gas B que está a la temperatura $T_o$ pero ocupando solamente un volumen $S * \left(2L - \frac{7}{4}L\right) = S * \frac{1}{4}L$

De acuerdo con la ecuación de los gases y para el gas A se cumple:

$$\frac{P_o(S*L)}{T_o}=\frac{P_{AA}\left(S*\frac{7}{4}L\right)}{T_2} \qquad \Rightarrow \qquad P_{AA}=\frac{4}{7}\frac{T_2}{T_o}P_o \qquad (6)$$

y para el gas B

$$\frac{P_o(S*L)}{T_o}=\frac{P_{BB}\left(S*\frac{1}{4}L\right)}{T_o} \qquad \Rightarrow \qquad P_{BB}=4P_o \qquad (7)$$

Se sustituyen las ecuaciones (6) y (7) en la (5)

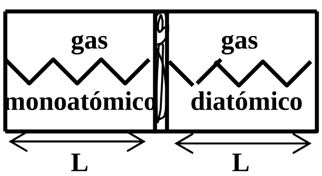
$$\frac{4T_2\ P_o}{7T_o}*S=4P_o*S+\frac{3}{2}kl \qquad \Rightarrow \qquad P_oS\left(\frac{4T_2}{7T_o}-4\right)=\frac{3}{2}kL \qquad (8)$$

De las ecuaciones (4) y (8) se deduce que:

$$P_oS\left(\frac{2T_1}{3T_o}-2\right)=kL=\frac{2}{3}P_oS\left(\frac{4T_2}{7T_o}-4\right) \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{2T_1}{3T_o}-2\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{4T_2}{7T_o}-4\right) \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad T_2=\frac{7}{4}(T_1+T)$$

***13.-Un cilindro está dividido en dos parte iguales mediante un pistón que a su vez está unido a dos muelles idénticos de constante elástica k, tal como indica la figura inferior***



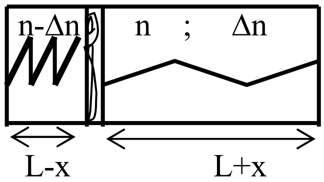

***En esa posición los muelles no están estirados. El compartimento izquierdo del cilindro contiene un gas ideal monoatómico y el derecho uno ideal diatómico. Inicialmente ambos gases se encuentran a la misma presión P y temperatura T y ocupan el mismo volumen V. El pistón es permeable al gas monoatómico pero no dejar pasar al diátomico. El pistón conduce el calor pero las paredes del cilindro no lo hacen.***
***Cuando se establezca el equilibrio definitivo calcular el desplazamiento que ha sufrido el pistón. Considear a las paredes y al pistón con capacidad calorífica nula.***

El gas monoatómico pasa del compartimento izquierdo al derecho con lo que aumenta el número de moles en el lado derecho y disminuye en el lado izquierdo, Esto hace que el pistón se desplace de

derecha a izquierda. A medida que pasa gas monoatómico su presión en el compartimento derecho *crece hasta que su presión parcial iguale a la presión en el lado izquierdo.*
Inicialmente el número de moles de gas diatómico y monoatómico es el mismo y lo designamos por n. Se cumple:

$$PV = nRT \qquad \Rightarrow \qquad n = \frac{PV}{RT}$$

Cuando se alcance el equilibrio en el lado izquierdo habrá n-Δn moles de gas monoatómico y en el derecho n moles de gas diatómico y Δn de gas monoatómico. El lado derecho tiene un volumen S*(L+x) y el izquierdo S*(L-x) , donde S es la sección del pistón y x el desplazamiento del mismo hacia la izquierda.




$P_A$ es la presión del gas monoatómico en el compartimento izquierdo

$p_A$ es la presión parcial del gas monoatómico en el compartimento derecho

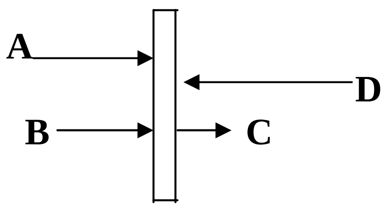
$p_B$ es la presión parcial del gas diatómico en el compartimento derecho

$T_1$ es la temperatura de los dos gases que en el equilibrio es la misma debido a que el pistón es permebale al calor.

Si aplicamos la ecuación de los gases ideales tenemos :

$$P_A * S(L-x) = (n-\Delta n)RT_1 \quad (1); \qquad p_A * S(L+x) = \Delta nRT \quad (2) \qquad p_B * S(L+x) = nRT \quad (3)$$

El pistón está en equilibrio debido a las siguientes fuerzas :




**A** es la fuerza que ejerce el gas monoatómico situado en la izquierda y vale $F_A = P_A*S$
**B** es la fuerza que ejerce el muelle comprimido de la izquierda y vale k* x
**C** es la fuerza que ejerce el muelle estirado y vale k*x
**D** es la fuerza que ejercen los gases de la izquierda y vale $(p_A+p_B)*S$

Cuando el pistón alcance el equilibrio la suma de esas fuerzas es cero y además la presión parcial del gas A en el compartimento derecho es igual a la presión del mismo gas en el compartimento izquierdo.

$$(p_A + p_B) * S = P_A * S + 2kx \quad \Rightarrow \quad p_B * S - 2kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{nRT_1}{V + Sx} * S - 2kx = 0 \quad (4)$$

Los muelles, en el equilibrio, almacenan energía potencial elástica, la cual, ha sido suministrada por la pérdida de energía interna de los gases, en consecuencia

$$\Delta U = nC_v^A (T_1 - T\ ) + nC_V^B (T_1 - T\ ) = n(T_1 - T\ )\ (C_v^A + C_v^B) = n(T_1 - T)\left(\frac{3}{2}R + \frac{5}{2}R\right)$$

$$n(T_1 - T\ )4R = -\Delta E_p = -2\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx^2 \qquad \Rightarrow \qquad n(T\ - T_1)4R = kx^2 \qquad \Rightarrow$$

$$nRT_1 = nRT\ - \frac{kx}{4} \qquad (5)$$

Se sustituye la ecuación (5) en (4)

$$\left(nRT - \frac{kx^2}{4}\right) * S - 2kxV - 2kSx^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{4}kS\ x^2 + 2kV\ x - nRST\ = 0$$

$$x = \frac{-2kV\ \pm \sqrt{4k^2V^2 + 9nRT}}{\frac{9}{2}kS} = \frac{-4kV\ \pm 2\sqrt{4k^2V^2 + 9PV}}{9kS}$$