MOVIMIENTO POR UN PLANO INCLINADO.

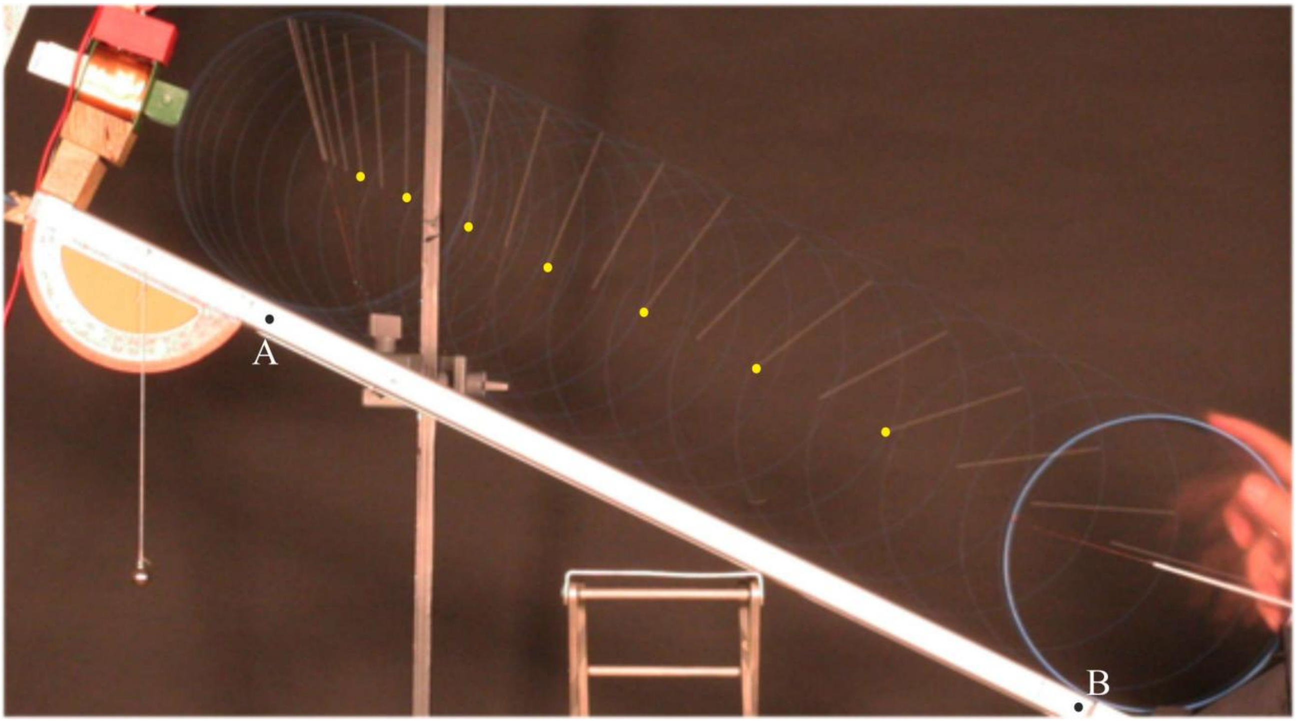


Foto 1

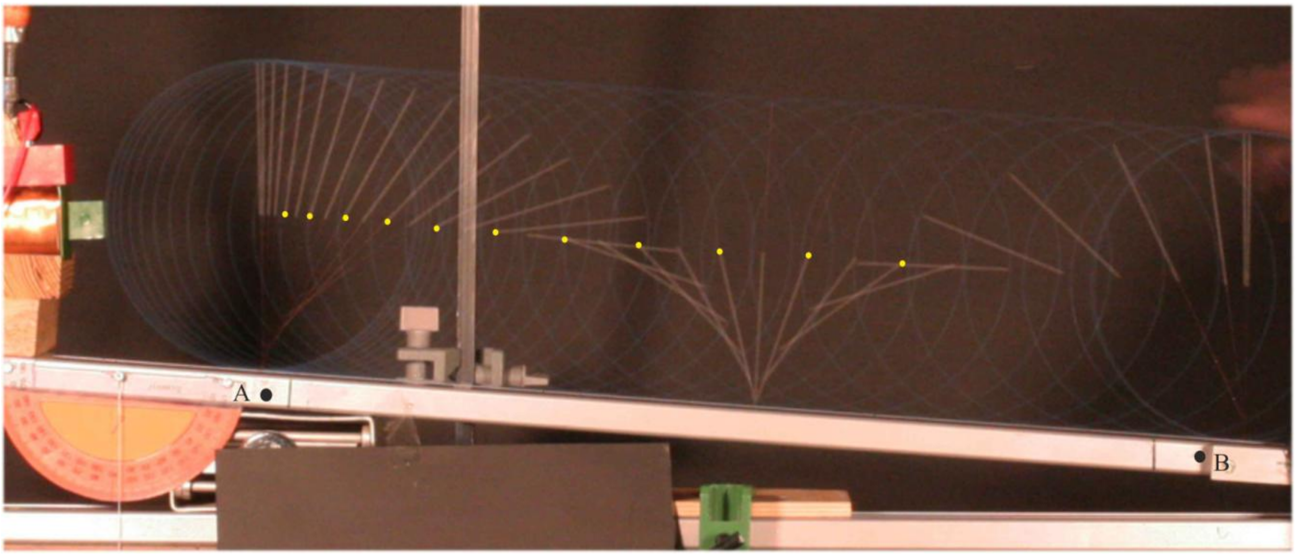


Foto 2

Nota importante. Este problema debe resolverse utilizando una hoja de cálculo

Las fotografías 1 y 2, corresponden al desplazamiento de un aro hacia la parte inferior de un plano inclinado. En la fotografía 1 el plano inclinado forma con la horizontal un ángulo de 25,6º y en la fotografía 2 el ángulo vale 3,9º.
El desplazamiento hacia abajo del aro puede ocurrir con dos tipos de movimiento: a) Denominado *rodadura* (algunos autores lo llaman rodadura pura) y b) Llamado *rodadura con deslizamiento.*

Para saber el tipo de movimiento del aro, debemos tener en cuenta que las fuerzas que actúan sobre el mismo, peso, reacción y fuerza de rozamiento son constantes, al igual que el momento de la fuerza de rozamiento, en consecuencia tanto la aceleración del c.d.m. como la angular serán constantes, de modo que para conocer el movimiento hay que determinar estas dos magnitudes. A partir de los valores obtenidos, tal como se verá más adelante, podremos clasificar los movimientos del aro en ambas fotografías.

La raya blanca que se observa en ambas fotografías es el radio del aro. En los dos casos el aro desplaza linealmente su centro de masas y al mismo tiempo gira sobre un eje perpendicular al plano del aro que pasa por su c.d.m. El movimiento de rotación se aprecia observando y midiendo, los ángulos girados por el radio, respecto del segmento definido por el propio radio en la primera posición, a la que asignamos el instante t = 0. Las posiciones angulares del radio en función del tiempo, están en la Tabla I.

Datos: Masa del aro, M = 437 g; Radio del aro = 9,3 cm

Tabla I

Fotografía 1											
Ángulo /º	0	7	19	30	45	62	81				
Tiempo en segundos: t/s	0	0,063	0,126	0,189	0,252	0,315	0,378				

Fotografía 2											
Ángulo /º	0	11	22	39	56	78	102	129	159	191	226
Tiempo en segundos: t/s	0	0,12	0,24	0,36	0,48	0,60	0,72	0,84	1,08	1,20	1,32

1) A la vista de las dos fotografías razone si el movimiento del aro es uniforme.

2) Con los datos del enunciado correspondientes a la fotografía 1, construya la nueva Tabla II con el tiempo en segundos, y el ángulo ahora en radianes, luego represente en el eje de abscisas el tiempo y en el de ordenadas el ángulo en radianes. Mediante la hoja de cálculo determine la ecuación de la gráfica y a partir de ella la aceleración angular.

Tabla II

Fotografía 1											
Ángulo /rad	0										
Tiempo en segundos: t/s	0	0,063	0,126	0,189	0,252	0,315	0,378				

3) Con los datos de la tabla del enunciado correspondientes a la fotografía 2, construya la nueva Tabla III, con el tiempo en segundos, y el ángulo ahora en radianes, luego represente en el eje de abscisas el tiempo y en el de ordenadas el ángulo en radianes. Mediante la hoja de cálculo determine la ecuación de la gráfica y a partir de ella la aceleración angular.

Tabla III

Fotografía 2											
Ángulo /rad	0										
Tiempo en segundos: t/s	0	0,12	0,24	0,36	0,48	0,60	0,72	0,84	1,08	1,20	1,32

4) Obtenga una fotocopia de la fotografía 1. Halle el factor de escala *f*, teniendo en cuenta que la distancia real entre A y B es 0,554 m.

$$f = \frac{0{,}554\ m}{distancia\ AB\ sobre\ la\ foto\ en\ cm}$$

Nota: Mida sobre la foto las distancias en cm, (que resulta más cómodo), posteriormente al calcular las distancia reales *S*, multiplicando el factor *f* por las distancias medidas en la foto S_f, es decir: $S = f \cdot S_f$, ya le salen en m.

5) Mida en la fotocopia las posiciones lineales del dentro de masas y luego obtenga las reales. Recoja los datos en una Tabla IV. Represente la posición real en metros, frente al tiempo y calcule la aceleración del centro de masas.

Tabla IV

Fotografía 1											
Posición foto S_f/ *cm*	0										
Posición real *S/m* $S = f \cdot S_f$											
Tiempo en segundos: *t/s*	0	0,063	0,126	0,189	0,252	0,315	0,378				

6) Haga lo mismo que en 4) con la fotografía 2. Escribiendo los datos en la Tabla V pero determinando en esta foto un nuevo factor, porque han podido variar las condiciones de la esta fotografía.

Tabla V

Fotografía 2											
Posición foto S_f/ *cm*	0										
Posición real *S/m* $S = f \cdot S_f$											
Tiempo en segundos: *t/s*	0	0,12	0,24	0,36	0,48	0,60	0,72	0,84	1,08	1,20	1,32

7) Halle los cocientes entre la aceleración del centro de masa y la aceleración angular para las dos fotografías. Si el cociente es próximo al valor del radio el movimiento es rodadura, si el cociente está lejos de ese valor existe rodadura con deslizamiento.

8) Calcule el momento de inercia del aro.

9) Deduzca la relación entre la energía de traslación del aro y la de rotación para ambas fotografías

Complete para la fotografía 1 la siguiente tabla

tiempo	0						
$E_{C(T)}$ traslación							
E_{CR} rotación							
E_{CT}/E_{CR}							

Complete para la fotografía 2 la siguiente tabla

tiempo	0										
$E_{C(T)}$ traslación											
E_{CR} rotación											
E_{CT}/E_{CR}											

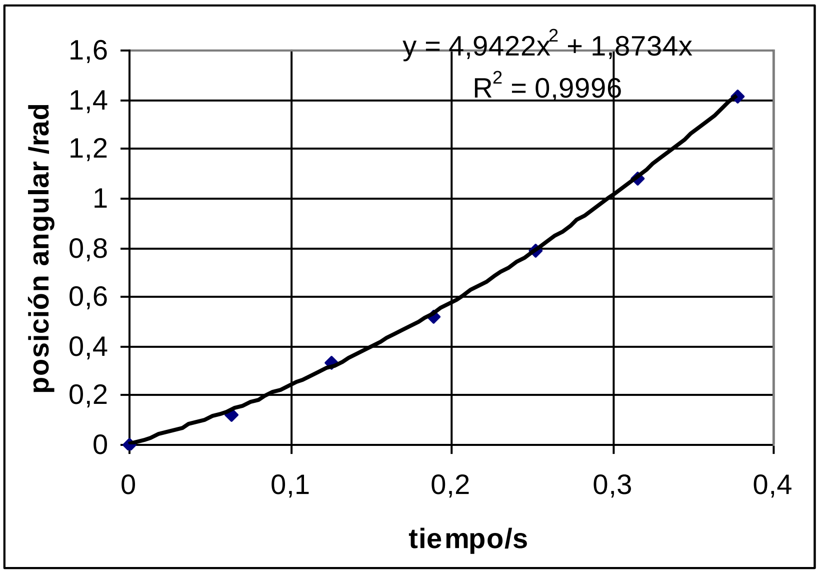
Deduzca en qué caso se acercan los valores experimentales a los teóricos

SOLUCIONARIO

1) Si el movimiento fuese uniforme en tiempos iguales el desplazamiento del centro de masa sería el mismo. En ambas fotografías a tiempos iguales no corresponden desplazamientos iguales sino que el desplazamiento es cada vez mayor, por tanto, se trata de movimientos acelerados.

2) Con los datos del enunciado correspondientes a la fotografía 1, construya una tabla tiempo en segundos, ángulo en radianes, luego represente en el eje de abscisas el tiempo y en el de ordenadas el ángulo en radianes. Mediante la hoja de cálculo determine la ecuación de la gráfica y a partir de ella la aceleración angular.

Fotografía 1	Ángulo/º	0	7	19	30	45	62	81
	Tiempo en segundos en la fotografía 1	0	0,063	0,126	0,189	0,252	0,315	0,378
	Ángulo/rad	0	0,122	0,332	0,524	0,785	1,082	1,414



Como el ajuste de los datos es una parábola la ecuación del movimiento es

$$\varphi = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

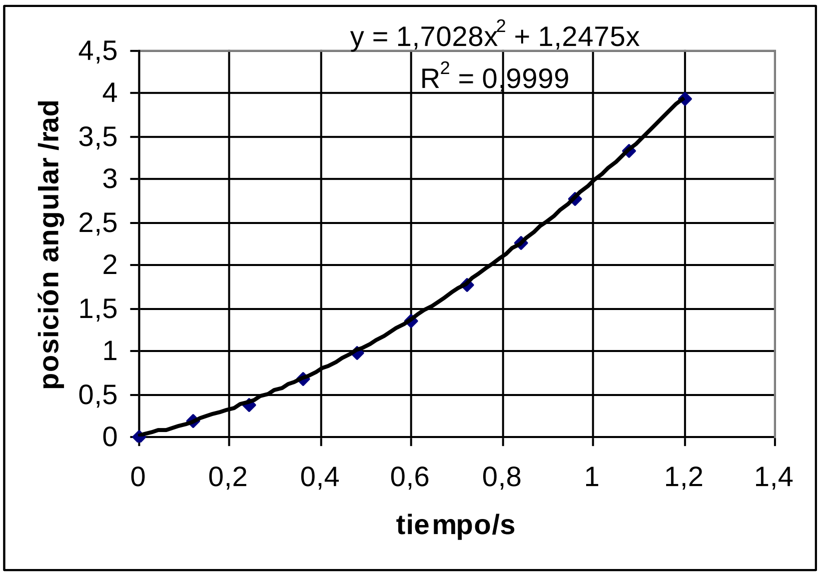
Comparando con la ecuación de la gráfica resulta:

$$\frac{1}{2}\alpha = 4{,}94 \Rightarrow \alpha = 9{,}9\ \frac{rad}{s^2} \quad ; \quad \omega_o = 1{,}87\ \frac{rad}{s}$$

3) Con los datos de la tabla del enunciado correspondientes a la fotografía 2, construya una tabla tiempo en segundos, posición angular en radianes, luego represente en el eje de abscisas el tiempo y en el de ordenadas el ángulo en radianes. Mediante la hoja de cálculo determine la ecuación de la gráfica y a partir de ella la aceleración angular

Fotografía 2

Ángulo/º	0	11	22	39	56	78	102	129	159	191	226
Tiempo en segundos en la fotografía 2	0	0,12	0,24	0,36	0,48	0,60	0,72	0,84	0,96	1,08	1,20
Ángulo/rad	0	0,192	0,384	0,681	0,977	1,36	1,78	2,25	2,78	3,33	3,94



Como el ajuste de los datos es una parábola la ecuación del movimiento es $\varphi = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

Comparando con la ecuación de la gráfica resulta:

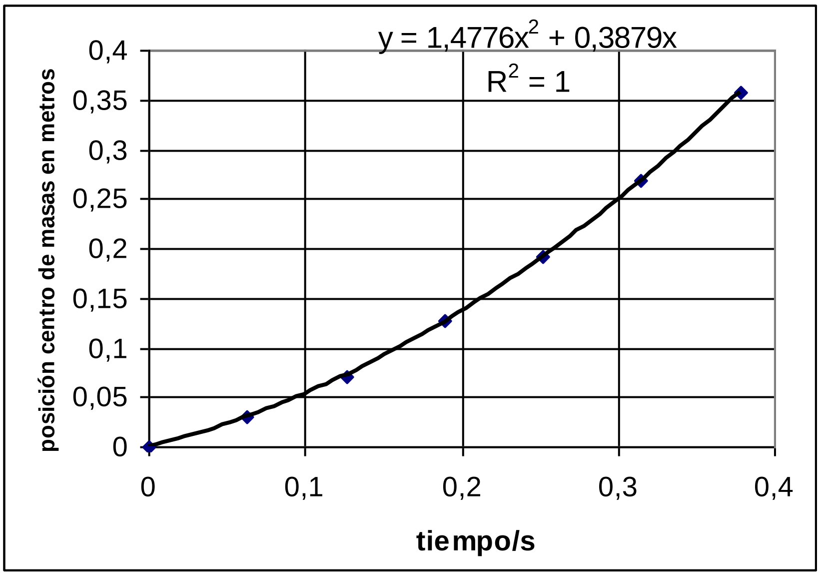
$$\frac{1}{2}\alpha = 1{,}7028 \Rightarrow \alpha = 3{,}40\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \quad ; \quad \omega_o = 1{,}25\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

4) Obtenga una fotocopia de la fotografía 1. Halle el factor de escala, teniendo en cuenta que la distancia real entre A y B es 0,554 m. Mida en la fotocopia las posiciones lineales del centro de masas y luego obtenga las reales. Recoja los datos en una tabla. Represente la posición real de el centro de masas en metros, frente al tiempo y calcule la aceleración del centro.

Factor de escala $f_1 = \dfrac{0{,}554\,m\ (\,reales)}{12\,cm\ \ (\ fotocopia)}$

Nota.- *El factor de escala depende del tamaño de la fotocopia*

Fotografía 1											
Posición foto S_f/ *cm*	0	0,65	1,55	2,75	4,15	5,80	7,75				
Posición real *S/m* $S = f \cdot S_f$	0	0,030	0,072	0,127	0,192	0,268	0,358				
Tiempo en segundos: *t/s*	0	0,063	0,126	0,189	0,252	0,315	0,378				



Como el ajuste de los datos es una parábola la ecuación del movimiento es

$$x_{CM} = v_o t + \frac{1}{2} a_{CM} t^2$$

Comparando con la ecuación de la gráfica resulta:

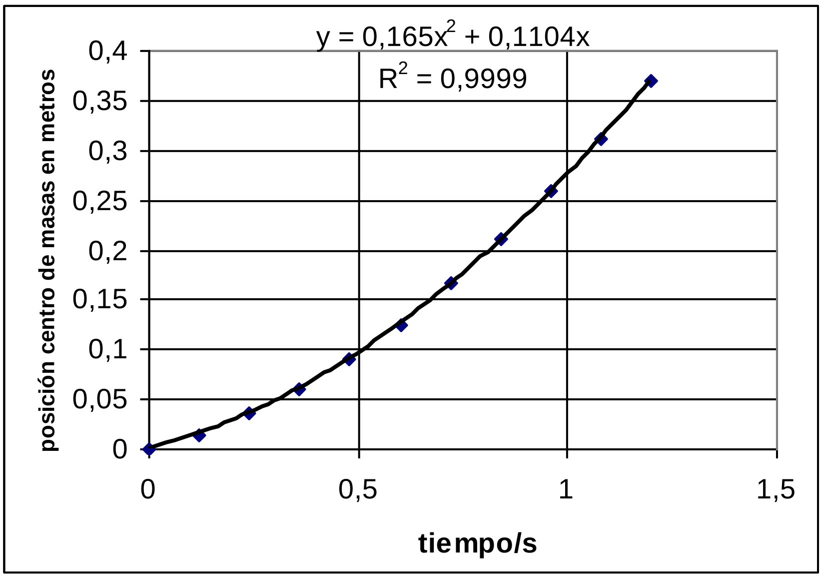
$$\frac{1}{2} a_{CM} = 1{,}4778 \Rightarrow \ a_{CM} = 2{,}96 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \ ; \ v_o = 0{,}39 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

5) Haga lo mismo que en 4) con la fotografía 2.

Factor de escala $$f_1 = \frac{0{,}554\,\text{m} \ \ (\text{reales})}{12{,}3\ \text{cm} \ \ (\textit{f}\text{otocopia})}$$

Nota.- *El factor de escala depende del tamaño de la fotocopia*

Fotografía 2											
Posición foto S_f/ *cm*	0	0,30	0,80	1,35	2,0	2,75	3,70	4,70	5,75	6,9	8,8
Posición real *S/m* $S = f \cdot S_f$	0	0,014	0,036	0,061	0,090	0,124	0,167	0,212	0,259	0,311	0,396
Tiempo en segundos: *t/s*	0	0,12	0,24	0,36	0,48	0,60	0,72	0,84	0,96	1,08	1,20



Como el ajuste de los datos es una parábola la ecuación del movimiento es

$$x_{CM} = v_o t + \frac{1}{2} a_{CM} t^2$$

Comparando con la ecuación de la gráfica resulta:

$$\frac{1}{2} a_{CM} = 0{,}165 \Rightarrow\ a_{CM} = 0{,}33 \frac{m}{s^2} \ ;\ v_o = 0{,}11 \frac{m}{s}$$

6) Halle los cocientes entre la aceleración del centro de masa y la aceleración angular para las dos fotografías. Si el cociente es próximo al valor del radio, el movimiento es rodadura, si el cociente está lejos de ese valor existe rodadura con deslizamiento.

Fotografía 1:

$$\frac{a_{CM}}{\alpha} = \frac{2{,}96 \frac{m}{s^2}}{9{,}9 \frac{rad}{s^2}} = 0{,}30\ m$$

En la fotografía 1 existe rodadura con deslizamiento

Fotografía 2:

$$\frac{a_{CM}}{\alpha} = \frac{0{,}33 \frac{m}{s^2}}{3{,}40 \frac{rad}{s^2}} = 0{,}097\ m = 9{,}7\,cm$$

En la fotografía 2 parece que existe rodadura (o rodadura pura); porque el valor del cociente 9,7 cm es bastante aproximado al del radio que es 9,3 cm. Téngase en cuenta que las medidas reales están afectadas de unos errores experimentales y los valores aquí obtenidos no son teóricos.

7) $I = M R^2 = 0{,}437 \cdot 0{,}093^2 = 3{,}78.10^{-3}\ kg,\ m^2$

8) Deduzca la relación entre la energía de traslación del aro y la de rotación si el movimiento es rodadura.

$$E_{CT} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 \quad ; \quad E_{CT} = \frac{1}{2} I\omega^2 \quad \Rightarrow \frac{E_{CT}}{E_{CT}} = \frac{M v^2}{I\omega^2} = \frac{M v^2}{M R^2 \omega^2} = \frac{v^2}{R^2 \omega^2}$$

Si hay rodadura $v = \omega R \Rightarrow \frac{v^2}{\omega^2} = R^2 \Rightarrow \quad \frac{E_{CT}}{E_{CR}} = 1$

Fotografía 1

$$E_C(\text{rotación}) = \frac{1}{2} I\,\omega^2 = \frac{1}{2} I\left(\omega_o + \alpha\, t\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}78.10^{-3} \cdot \left(1{,}87 + 9{,}9 \cdot t\right)^2$$

$$E_C(\text{traslación}) = \frac{1}{2}\ M\,v^2 = \frac{1}{2} M\left(v_o + a_{CM}\, t\right)^2 = \frac{1}{2} 0{,}437\left(0{,}39 + 2{,}96\, t\right)^2$$

tiempo	0	0,063	0,126	0,189	0,252	0,315	0,378
$E_{C(T)}$ traslación		0,0726	0,127	0,197	0,282	0,382	0497
E_{CR} rotación		0,0115	0,0178	0,0259	0,0352	0,0460	0,0583
E_{CT}/E_{CR}		6,3	7,1	7,6	8,0	8,3	8,5

Como los cocientes son muy distintos de la unidad, nos vienen a confirmar que en este caso no existe rodadura.

Fotografía 2

$$E_C(\text{rotación}) = \frac{1}{2} I\,\omega^2 = \frac{1}{2} I\left(\omega_o + \alpha\, t\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}78.10^{-3} \cdot \left(1{,}25 + 3{,}4 \cdot t\right)^2$$

$$E_C(\text{traslación}) = \frac{1}{2}\ M\,v^2 = \frac{1}{2} M\left(v_o + a_{CM}\, t\right)^2 = \frac{1}{2} 0{,}437\left(0{,}11 + 0{,}33\, t\right)^2$$

tiempo	0	0,12	0,24	0,36	0,48	0,60	0,72	0,84	0,96	1,08	1,20
$E_{C(T)}$ traslación		0,00489	0,00782	0,0114	0,0157	0,0207	0,0264	0,0328	0,0398	0,0475	0,0559
E_{CR} rotación		0,00509	0,00789	0,0113	0,0153	0,0200	0,0253	0,0312	0,0377	0,0448	0,0526
E_{CT}/E_{CR}		0,96	0,99	1,00	1,03	1,04	1,04	1,05	1,06	1,06	1,06

La aproximación de los cocientes a la unidad, nos viene asegurar que hay rodadura o una situación del movimiento muy cercana a ella.