Introducción a la teoría de campos II

7. **FLUJO DE UN CAMPO VECTORIAL**

El flujo Φ de un campo vectorial, ya fue definido por $\Phi = \int \vec{I} \bullet d\vec{S}$.

A ser un producto escalar será una MAGNITUD ESCALAR, y por lo tanto dependerá del coseno del ángulo que forman los vectores $\vec{I}$ y $d\vec{S}$ siendo el vector superficie, un vector cuyo módulo es su valor numérico, la dirección es perpendicular a la superficie, y el sentido saliente de la misma si es cerrada. En consecuencia, considerando superficies cerradas:

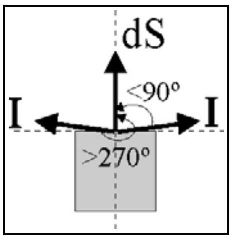


Fig.22

a) Si el ángulo que forman $\vec{I}$ y $d\vec{S}$ está entre $0°$ y $90°$, o entre $270°$ y $360°$, al ser el coseno > 0 , el flujo será POSITIVO, lo cual nos indicaría que las líneas de fuerza SALDRÍAN DE LA SUPERFICIE [véase el dibujo] (EL VECTOR SUPERFICIE ESTÁ DIRIGIDO HACIA AFUERA). Al ser una superficie cerrada, podrá contener una magnitud activa que sea FUENTE DE LÍNEAS DE FUERZA (carga positiva) (fig.22).

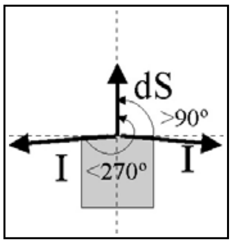


Fig.23

b) Para un valor de ángulo entre $\vec{I}$ y $d\vec{S}$ comprendido entre $90°$ y $270°$, el flujo sería NEGATIVO, al serlo su coseno. Este caso se producirá cuando las líneas de fuerza ENTRAN EN LA SUPERFICIE, al ser ésta cerrada, deberá contener magnitud activa que sea un SUMIDERO de líneas de fuerza (masa o carga negativa) (fig.23).

c) Si las líneas de fuerza son tangentes a la cara plana de una superficie, es evidente que ni entran ni salen, por lo que el flujo que atraviesa dicha superficie es nulo.

Por lo tanto el valor del flujo, o mejor la variación del flujo que atraviesa una superficie cerrada, nos permitirá averiguar el tipo de campo que existe en una determinada zona del espacio, en función del signo del flujo:

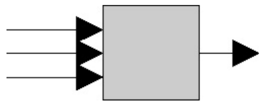


Fig.24

a) Si entran más que salen, $\Delta\Phi \rangle\, 0$, dentro habrá MASA o CARGA NEGATIVA (fig.24).

b) Si salen más que entran $\Delta\Phi \langle\, 0$, dentro habrá CARGA POSITIVA, (fig.25).

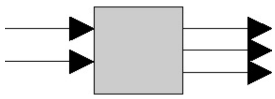
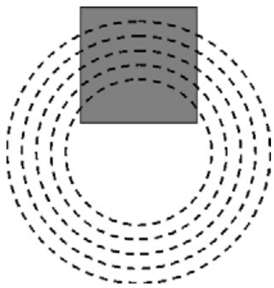


Fig.25

c) Si entran igual número que salen $\Delta\Phi = 0$, significa que dentro no hay manantiales ni sumideros. También podría implicar que las líneas de fuerza son CERRADAS, tratándose por ello de un campo magnético (fig.26 y 27).

Fig.27


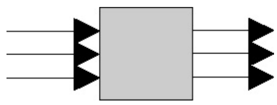


Fig.26

7.1. CÁLCULO DEL FLUJO DE UN CAMPO VECTORIAL.

Dado que el flujo Φ, por definición se determina por $\Phi = \int \vec{I} \bullet d\vec{S}$, a través del producto escalar de dos vectores, $\vec{I}$ y $d\vec{S}$, debemos conocerlos previamente.

a) En todos los problemas o cuestiones suele darse la intensidad del campo, por ser su característica, o la fuerza del campo ($\vec{F} = \vec{I}\ A$).

b) El vector superficie se puede calcular a partir del producto vectorial de los vectores que forman dicha superficie, multiplicándolos en tal orden que la resultante esté dirigida perpendicularmente y hacia afuera. En caso de no conocer los vectores (lados con asignación vectorial) que la forman, se podría calcular por cualquier método el área, como escalar, asignándole después el sentido vectorial perpendicular y hacia afuera.

APLICACIÓN

Ej6 Un campo vectorial tiene una intensidad **I** = 3x **i** , determina el flujo de líneas de fuerza a través del prisma de la figura 28. Se observa que el valor del campo es el mismo en todos los puntos de las caras que tengan la misma x, por lo que la integral de **I** a través de todas las caras de la superficie cerrada, se puede descomponer en suma de los flujos que pasan por cada una de las seis caras planas y al ser **I** constante en cada una es innecesario resolver una integral, bastando con calcular el flujo a través de cada cara plana y luego sumarlo escalarmente para hallar el flujo total. De acuerdo con esto usaremos:

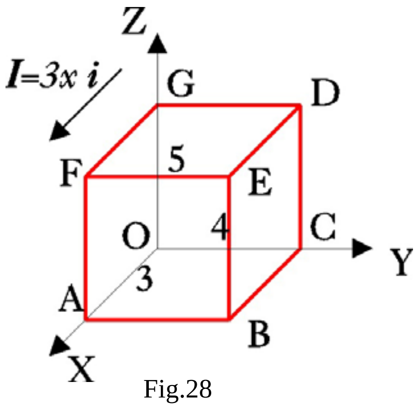


Fig.28

FÓRMULA DE APLICACIÓN : $\Phi = \vec{I} \cdot \vec{S}$

PASOS A SEGUIR:

a) En este caso consideraremos las superficies, las caras del prisma, asignándoles un vector direccional a los módulos de dichas superficies.

b) Dado que la intensidad del campo, sólo tiene componente X , y se trata de un producto escalar, sólo son válidas, esto es, no se anularán, los productos con los vectores superficies que tengan dicha componente, o sea AFEB y OGDC, la primera como 20**i** y la segunda como -20**i**.

c) Como la intensidad del campo es una función de x, cuando la línea de fuerza corte a la superficie OGDC, x=0, por lo que **I**=0, anulándose el producto escalar. En consecuencia el flujo **M** que atraviesa dicho prisma, corresponderá únicamente con el que pasa por la cara AFEB donde x=3;

I= 3x**i** =3.3**i** = 9**i**. Como **S**=4.5**i**= 20**i** unidades de superficie, el flujo $\Phi = \vec{I} \cdot \vec{S} = 9\vec{i} \cdot 20\vec{i} = 180$ o sea 180 unidades de flujo.

d) Dado que el flujo es positivo, o sea saliente, en dicho paralelepípedo, deberá existir una FUENTE DE CAMPO, o sea MAGNITUD ACTIVA (CARGA POSITIVA).

8. FLUJO Y DIVERGENCIA.

Hemos visto la importancia de conocer la variación del flujo que atraviesa una superficie cerrada a fin de averiguar si encierra alguna fuente de campo o sumidero, y así conocer el tipo de magnitud activa. Por eso es interesante definir la variación del flujo por unidad de volumen o sea d**M** /dV, que nos daría el flujo encerrado en la superficie que abarca un volumen V.

Esta magnitud se denomina DIVERGENCIA[1], y se expresa como EL PRODUCTO ESCALAR DEL OPERADOR NABLA POR LA INTENSIDAD DEL CAMPO: $\vec{\nabla} \bullet \vec{I} = \frac{d\Phi}{dV}$. (7)

a) Si la divergencia de un campo es $0, d\Phi = 0$, lo que quiere decir que Φ = constante. Este tipo de campos se llaman **SOLENOIDALES**, como ocurrirá con el magnético o electromagnético.

b) Si la divergencia de un campo es distinta a 0, será **NO SOLENOIDAL**, ocurriendo dos casos:

b$_1$)Que $\vec{\nabla} \bullet \vec{I} \rangle 0$, y por lo tanto $d\Phi \rangle 0$, saliendo más líneas de las que entran: **CAMPO DIVERGENTE** (como el eléctrico).

---

[1] Maxwell en su “Treatise on Electricity and Magnetism”, de 1873, en la secuencia de una operación sobre el cuaternion $\sigma = ti + uj + vk$, $-\left(\frac{dt}{dx} + \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dz}\right) = S\nabla\sigma$, denomina a dicha operación, *convergencia de* σ. Fue el matemático inglés William Clifford, el que en 1878,en su libro “Elements of Dynamic”, el que creó el término *divergencia*, en contraposición con la convergencia de Maxwell, para la operación con el signo contrario. Muere al año siguiente y no lo desarrolla, cuestión que sigue Heaviside, que es el que la divulga.Tanto Faraday como Maxwell, enunciaron sus fórmulas escalarmente. La notación vectorial, fue creada por el físico y matemático inglés Oliver Heaviside, fundador de lo que llamó “Análisis vectorial”. Inicialmente sus artículos se publicaron en la revista *Electrician*, y colisionaron de tal manera con los tratamientos usuales de la época que sus editores se negaron a publicarlos. Sus trabajos se recopilaron en los “*Electrical papers*”, publicados en 1892. En el prefacio de los “*papers*”, el autor se lamenta de que sus ideas hayan sido boicoteadas por ser contrarias a las ideas oficiales. El tiempo le daría la razón. Heaviside fue el primero en calcular correctamente el campo creado por una carga en movimiento. Heaviside, en 1883, publica en el “*Electrician*”, un trabajo sobre “Algunas relaciones electrostáticas y magnéticas”. En él, considerando R fuerza electrostática, y ρ, la “*densidad volúmica de electricidad*”, $4\pi\rho = div.R$. De tal forma que siendo X, Y, Z las componentes de la fuerza R (obsérvese que en esa época no se reseñaban los vectores ni en negrita, ni con el símbolo vectorial encima) $4\pi\rho = \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}\right)$. Aquí vuelve a aparecer el término divergencia, que a partir de este momento se popularizaría. La notación $\nabla \bullet R = divergencia\ de\ R$, aparecería con los trabajos por separado de Gibbs y Heaviside (ambos empleaban notaciones vectoriales distintas), después de 1900.

b$_2$) Que $\vec{\nabla}\bullet\vec{I}\langle 0$, y por lo tanto $d\Phi\langle 0$, entrando más líneas de las que salen: **CAMPO CONVERGENTE** (como el gravitatorio).

8.1. CÁLCULO DE LA DIVERGENCIA

El uso de la divergencia, en lugar de la variación de flujo para reconocer un tipo de campo vectorial, viene motivado por la facilidad de su cálculo.

Dado que: $\vec{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{k}$ (8) e $\vec{I}=I_x\,\vec{i}+I_y\,\vec{j}+I_z\,\vec{k}$ (9)

su producto escalar será $\vec{\nabla}\bullet\vec{I}=\frac{\partial I_x}{\partial x}+\frac{\partial I_y}{\partial y}+\frac{\partial I_z}{\partial z}$ (10)

O sea que se obtendría la divergencia derivando parcialmente cada componente del vector campo respecto a su variable. Si se aplica a un punto del campo determinado, se sustituiría, sumándose como números, dado que es un escalar.

APLICACIÓN

Ej7. Determine a de forma que el campo **V** = (x+3y) **i** + (y-2z) **j** + (x + az) **k** , sea SOLENOIDAL

FÓRMULAS Y CONCEPTOS DE APLICACIÓN:

Como es un campo solenoidal : $\vec{\nabla}\bullet\vec{I}=0$. De lo que $\vec{\nabla}\bullet\vec{I}=\frac{\partial I_x}{\partial x}+\frac{\partial I_y}{\partial y}+\frac{\partial I_z}{\partial z}=0$

PASOS A SEGUIR:

a) Se deriva cada componente respecto a su variable y se iguala a 0 (lo que no haga referencia a cada variable se considerará constante). Así : $\frac{\partial(x+3y)}{\partial x}=1$; $\frac{\partial(y-2z)}{\partial y}=1$; $\frac{\partial(x+az)}{\partial z}=$ a

b) Sustituyendo $\vec{\nabla}\bullet\vec{\mathrm{I}}=1+1+\mathrm{a}=0$; $\mathrm{a}=-2$

9. TEOREMA DE GAUSS.

Es muy importante relacionar el flujo de líneas de fuerza que entra o sale de una superficie cerrada, con la cantidad de magnitud activa que dicha superficie pueda encerrar; es como enterarse del tipo y el número de alumnos que hay en un aula, escuchando desde fuera, con la puerta cerrada, el barullo que hacen cuando no está el profesor. Este es el objetivo del teorema de Gauss (T.d.G.)[2].

Sea *A´ una magnitud activa testigo y A la magnitud activa fuente.* En este caso la intensidad del campo es ***I*** = ***F****/A´* y como la fuerza de interacción en los campos llamados newtonianos es:

$\vec{F}=k\frac{AA'}{(|\vec{r}|)^2}\vec{u}_r$, siendo $\vec{u}_r$ un vector unitario radial o versor = $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$, por lo que sustituyendo

$$\vec{I}=\frac{\vec{F}}{A'}=k\frac{A}{(|\vec{r}|)^2}\vec{u}_r=k\frac{A}{(|\vec{r}|)^3}\vec{r} \quad (11)$$

Si la magnitud activa es puntual, o con simetría esférica, depende sólo del radio, (en este último caso en el exterior de la masa activa) por eso su intensidad es radial y así son las líneas de fuerza. El vector unitario dará la dirección a la intensidad, en los campos NO SOLENOIDALES.

a) Si es CONVERGENTE (gravitatorio), $\vec{I}$ y $\vec{r}$ tienen sentido contrario, y por lo tanto para conservar la igualdad vectorial, deberá introducirse un signo menos.
b) Si es DIVERGENTE (eléctrico), $\vec{I}$ y $\vec{r}$ tienen el mismo sentido vectorial, y no hace falta el signo menos.

---

2 El teorema de Gauss, también llamado de la divergencia, fue atribuido a Gauss por Hermann Rothe, en 1839, sin embargo al parecer ya había sido publicado por Ostrogradsky, en 1828, en la memoria de la Academia rusa de San Petersburgo. El aparato matemático de reducción de integrales triples a dobles, también había sido publicado por Lagrange, uno de los padres del sistema métrico decimal. La aplicación del flujo de líneas de fuerza, no fue elaborada por aquel matemático, sino por William Thomson, refiriéndose al flujo de calor desde un sólido infinito, reconvirtiéndolo en flujo eléctrico, sustituyendo la fuente de calor por la carga (magnitud activa) y la temperatura por potencial.

Si se encierra una determinada cantidad de magnitud activa, en una superficie esférica (SUPERFICIE DE GAUSS), de forma que todas las líneas de fuerza que entren o salgan de dicha magnitud activa tengan que cortarla (lo harán perpendicularmente si la magnitud es puntual), el flujo que la atraviesa será:

$$\Phi = \int \vec{I} \bullet d\vec{S} = \int k \frac{A}{(|\vec{r}|)^2} \vec{u}_r \bullet d\vec{S} \qquad (12)$$

c) Como el vector superficie $d\vec{S}$ es perpendicular a un elemento de superficie de la esfera y hacia afuera, si el CAMPO ES DIVERGENTE (eléctrico), el ángulo entre el vector intensidad y el superficie es 0, y su coseno es 1, por lo que aplicado a toda la superficie de la esfera:

$\Phi = k\left(\frac{A}{r^2}\right).4\pi r^2 = 4\pi kA = 4\pi k\, q$. Sustituyendo $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$; $\Phi = \frac{q}{\varepsilon}$

y para varias cargas de la misma naturaleza: $\Phi = 4\pi k\, \Sigma q = \frac{\Sigma q}{\varepsilon}$ (13)

d) En el caso de un CAMPO CONVERGENTE (gravitatorio o de carga negativa), el ángulo formado entre el vector intensidad (hacia dentro de la superficie) y el vector superficie (hacia afuera, por definición) es 180º, y su coseno -1, por lo que aplicado a toda la esfera será:

$\Phi = -k\left(\frac{A}{r^2}\right).4\pi r^2 = -4\pi kA = -4\pi G\, m$, dado que k = G.

y para varias masas o cargas negativas : $\Phi = -4\pi G\, \Sigma m$ (14a); $\Phi = -4\pi k\, \Sigma q = -\frac{\Sigma q}{\varepsilon}$ (14b)

En todo caso el ***FLUJO QUE ATRAVIESA UNA SUPERFICIE CERRADA, ES PROPORCIONAL A LA CANTIDAD DE MAGNITUD ACTIVA ENCERRADA EN DICHA SUPERFICIE (T.de Gauss).***

Como se puede apreciar en las gráficas (fig. 29 y 30), existirá una relación lineal entre el flujo y la magnitud activa que lo crea.

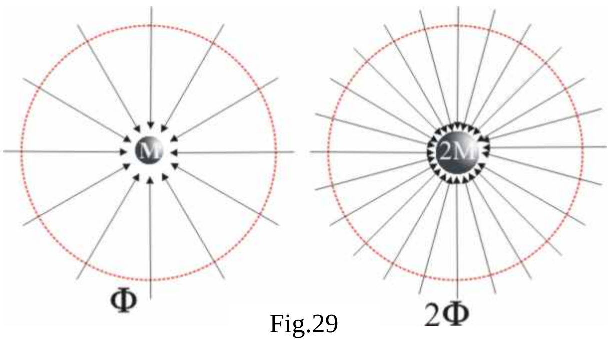


Fig.29

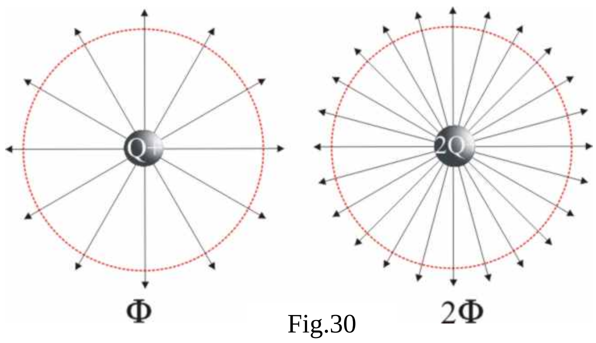


Fig.30

9.1. APLICACIONES DEL TEOREMA DE GAUSS.

La aplicación más importante es la determinación de la intensidad de un campo en un punto, creado por una determinada distribución de magnitud activa (puntual o extensa). Se basa en igualar el flujo que sale de la magnitud activa, obtenido a partir de la fórmula de definición y del flujo que atraviesa una determinada superficie gaussiana que pasa por el punto donde que se quiere averiguar la intensidad del campo. El teorema de Gauss siempre permite determinar el valor del flujo a través de una superficie cerrada y solamente en aquellas situaciones en las que exista mucha simetría, también podremos averiguar el valor del campo.

APLICACIÓN

Ej8.Se pretende calcular la intensidad del campo producida en un punto P, por una distribución homogénea de magnitud activa (carga eléctrica o masa) en forma cilíndrica y en un medio homogéneo e isótropo.

Relación : Aplicación práctica a la intensidad del campo producido por la carga estática en un conductor cilíndrico (CAMPO DIVERGENTE) , o por la masa de una pesada cadena o tubo (CAMPO CONVERGENTE).

PASOS A SEGUIR:

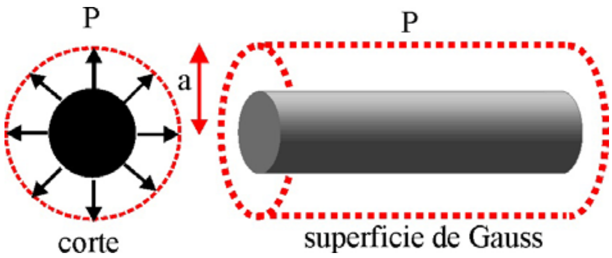


Fig.31

a) Se traza una superficie gaussiana cerrada (líneas de puntos) que rodee la distribución de magnitud activa, pero con igual simetría que ésta (fig.31). En este caso será un cilindro, de radio a , tal que pase por el punto P y que contenga dentro a toda la magnitud activa. Las líneas de fuerza de la distribución de magnitud activa, siempre radiales serán perpendiculares a dicha superficie. El ángulo que formarán las líneas de fuerza y por lo tanto la intensidad del campo con el vector superficie lateral, será $0°$ para campos divergentes, y $180°$ para los convergentes.
Con las caras bases, las líneas de fuerza formarán $90°$ y como $\cos 90°$ =0, no saldrá nada de flujo.

b) El flujo de líneas de fuerza por aplicación del T.d.G. será : $\Phi = 4\pi kA$, para masas $\Phi = -4\pi km$ y para cargas positivas, $\Phi = 4\pi kq$

c) El flujo de líneas de fuerza que entra o sale del cilindro gaussiano, será la suma de los flujos que pasan a través de todas las caras del cilindro gaussiano y con las consideraciones anteriores pues solo sale por la superficie lateral, y aplicando la fórmula del flujo $\Phi = \int \vec{I} \bullet d\vec{S} = I.2\pi aL$, ya que 2**B**aL es la superficie lateral del cilindro, y su vector (siempre hacia afuera) forma ángulos de 0 o 180º (CAMPO DIVERGENTE o CONVERGENTE) con el vector intensidad.

d) Igualando ambas expresiones $4\pi kA = I.2\pi aL$, I = 2kA/aL, teniendo en cuenta que A/L es la densidad lineal de magnitud activa λ , la expresión final será : I = 2k λ /a. Especificando:

Para el campo gravitatorio g = -2G λ /a . Para el campo eléctrico (+), E = 2k λ /a.= $E = \dfrac{2k\lambda}{a} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon a}$

Ej9.Se pretende calcular la intensidad del campo producido en un punto P, por una distribución homogénea de magnitud activa, en forma de lámina extensa, con una densidad constante σ (se supone que la distancia de P a la lámina es muy pequeña comparable con las dimensiones de la misma)
Relación: Campo creado por una lámina cargada (placa de un condensador)
Carga positiva: CAMPO DIVERGENTE. Carga negativa: CAMPO CONVERGENTE.

PASOS A SEGUIR:

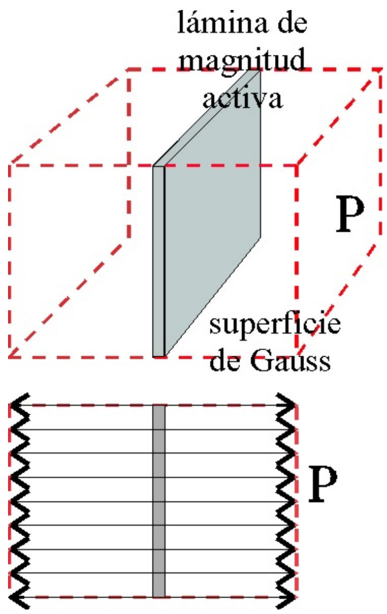


Fig.32

a) Se traza una superficie gaussiana (líneas de puntos) que envuelva a la lámina y con su misma simetría, cuidando que pase por el punto P, de forma que todas las líneas de fuerza pasen a través de ella (fig.32). En este caso la forma que mejor se "adapta" a nuestra lámina, será una caja paralelepipédica. Las líneas de fuerza que salen de la lámina atraviesan perpendicularmente las dos caras de la "caja", paralelas a la lámina, por lo que el ángulo formado, en el caso de que la carga sea positiva, siempre será de $0°$. El flujo que atraviesa el resto de las caras será nulo, pues el campo forma con el vector superficie de cada cara, un ángulo de $90°$. En consecuencia, el flujo total es igual al que sale por las caras paralelas a la lámina.

b) El flujo de líneas de fuerza por aplicación del T.d.G. será : $\Phi = 4\pi kA$, para cargas positivas, $\Phi = 4\pi kq$.

c) El flujo de líneas de fuerza que sale de la caja gaussiana, será, aplicando la fórmula del flujo $\Phi = \int \vec{I} \bullet d\vec{S}$ = I. 2S , siendo S la superficie lateral de cada cara.

d) Igualando ambas expresiones 4 π kq = E 2S , E = 2 π kq/S, teniendo en cuenta que q/S es la densidad superficial de magnitud activa (carga) σ , la expresión final será : E = 2 π k σ = $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon}$, que tiene una gran importancia, puesto que NO DEPENDE DE LA DISTANCIA, y por lo tanto si la distribución es homogénea, dará lugar a un CAMPO DE INTENSIDAD CONSTANTE .

En todo caso el sentido vectorial corresponderá al de la línea de fuerza, esto es saliente de la lámina. Si en las proximidades de la misma existiera otra lámina con similar distribución de carga, aunque de signo negativo, en el espacio intermedio, LA INTENSIDAD DEL CAMPO SERÍA CONSTANTE, y aplicando el principio de superposición,

$$E\ total = E(+) + E(-) = 4\pi k\sigma = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

APLICACIÓN

Ej10. ¿Si la intensidad de un campo depende de la cantidad de magnitud activa encerrada en una superficie, la intensidad del campo gravitatorio terrestre sería igual dentro de la Tierra, que en su superficie o fuera de la Tierra?

Se sabe que el campo gravitatorio es un campo convergente, creado por la masa de la Tierra M, cuya intensidad es:
$\mathbf{g} = -G\ (M/r^2)\ \mathbf{u_r}$ y que en su superficie será :$\mathbf{g} = -G\ (M/R^2)\ \mathbf{u_r}$, siendo R el radio de la Tierra, y fuera de la superficie, será inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Sin embargo dentro de ella, al variar la cantidad de magnitud activa, deberá disminuir su intensidad.

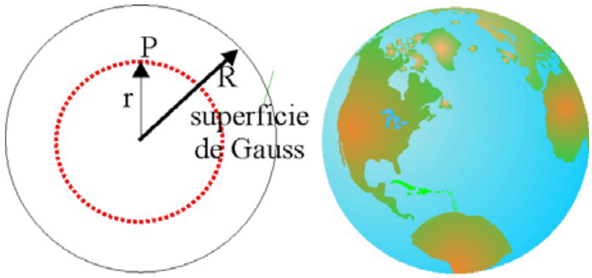


Fig.33

PASOS A SEGUIR:

a) Se elige un punto P del interior de la Tierra a una distancia r de su centro, trazando por él una superficie de Gauss esférica (fig.33)
b) Se considera el flujo que sale de dicha superficie, que será proporcional a la magnitud activa A, en este caso M', que sería la masa de la Tierra encerrada en la gaussiana: $\Phi = -4\pi GM'$
c) Como por definición el flujo es : $\Phi = \int \mathbf{I}.\ d\mathbf{S} = I.4\pi r^2$, al igualar ambas expresiones tendremos que $\mathbf{I} = -G(M'/r^2)\ \mathbf{u_r}$
d) Pero la masa encerrada es igual al volumen por la densidad ρ (se supone homogénea[3]), $M' = 4\pi r^3\ \rho/3$, por lo que sustituyendo nos queda: $\mathbf{I} = -(4\pi G/3)\ r\ \mathbf{u_r}$, por lo tanto es una función lineal del radio (fig.34). ¿Qué significa esto? Sencillamente que mientras fuera de la Tierra la función era inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, ahora es lineal, y que en el centro de la Tierra su gravedad, o intensidad de su campo gravitatorio sería nula, como se puede observar a través de la gráfica de su variación. Por lo tanto habrá dos puntos, uno fuera de la Tierra, y otro dentro de la misma, donde una persona debe pesar lo mismo.

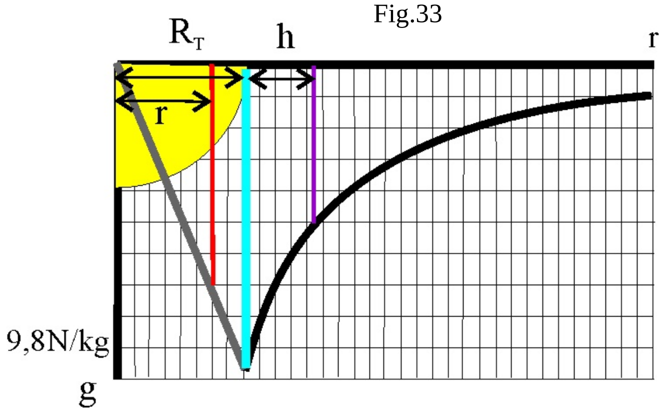


Fig.34

En el interior, dado que la relación es lineal se puede determinar a partir de la proporción $P_0/P = R/(R-h)$, siendo R el radio de la Tierra, y h, la profundidad.
En el exterior la relación es cuadrática e inversa, y por lo tanto $P_0/P = [(R+h)/R]^2$, y P_0 sería el peso en la superficie o sea mg_0

APLICACIÓN

Ej11. Si en un planetoide esférico, macizo y homogéneo, perforado por el centro cayera un objeto, ¿Qué movimiento describiría?

PASOS A SEGUIR:

a) Está perfectamente claro que la intensidad es $\mathbf{I} = -(4\pi G\rho/3)\ r\ \mathbf{u_r}$, como $\mathbf{I} = \mathbf{F}/m$, la fuerza que lo atrae y hace caer será:
$\mathbf{F} = -(4\pi G\rho m/3)\ r\ \mathbf{u_r}$ (Se debe recordar que el signo menos surge por tratarse de un campo atractivo (convergente), y tener sentido contrario los vectores fuerza y r), esta expresión es semejante a la que regula un movimiento periódico (armónico simple) $\mathbf{F} = -\omega^2 m\ \mathbf{r}$, siendo $\mathbf{a} = -\omega^2\ \mathbf{r}$ Por lo tanto, igualando ambas expresiones, diríamos que describiría un movimiento periódico tal que $\omega = \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3}}$.
De tal forma que conociendo la densidad, se podría determinar el tiempo que tardaría en regresar a la superficie, pues sólo depende de de ese término.

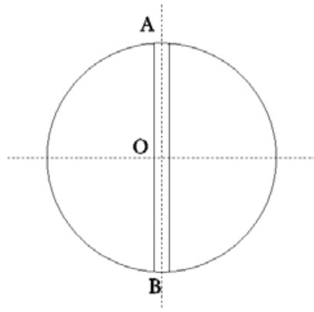


Fig.35

En el caso de un sistema similar en tamaño a la Tierra (fig.35), suponiendo una densidad media y constante de 5500 kg/m^3, y dado que $\omega = \frac{2\pi}{T}$, el tiempo que tardaría un objeto en la ida y vuelta AB + BA, sería $T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} = \frac{3{,}76.10^5}{\sqrt{\rho}} = 5070s = 1h\ y\ 24\min$ aproximadamente, lo cual para recorrer dos veces el diámetro terrestre 2(12.740km), hacen que la velocidad en el centro de la Tierra (máxima) O , sea considerable.

APLICACIÓN

[3] La Tierra no es homogénea como se puede comprender, y su densidad aumenta con la profundidad, siguiendo la relación: $d = d_0\ (1-3r^2/4R^2)$. Se toma d_0 como 10000kg/m^3.

Ej12. ¿Se podría hacer la misma consideración del ejemplo 9, para el caso de que tuviéramos una esfera metálica electrizada (con carga eléctrica estática), y en equilibrio?

CONSIDERACIONES PREVIAS.

En un conductor metálico existen igual número de cargas positivas que negativas, deberá ser electrizado para que exista como en este caso un exceso de carga positiva. Teniendo en cuenta que el campo eléctrico es divergente, y que la carga positiva provoca que las cargas de igual signo se alejen de ella siguiendo la trayectoria de las líneas de fuerza (radiales), la carga dentro de un conductor, por el hecho de serlo (se mueven libremente), se desplazarían hacia la superficie.

PASOS A SEGUIR.

a) Se traza una superficie de Gauss G, por la parte interior de la periferia del conductor (línea de puntos roja). Al no encerrar magnitud activa, la intensidad del campo es 0. O sea que a $r<R$, $E = 0$

b) Debido a las características específicas del campo eléctrico, toda la carga encerrada Q deberá mantenerse en la superficie, comportándose a esas distancias ($r>R$) como si la distribución fuera puntual (Teorema de Newton). Así se aprecia en el gráfico inferior de la derecha (fig.36), en el que la línea de puntos especifica la variación del campo debido a la misma Q concentrada en el punto P, no superpuesto. Por este motivo, aparte del signo vectorial, la variación del campo eléctrico dentro de un conductor es muy diferente de la del campo gravitatorio, que sólo se podría comparar en el caso de las cargas estuvieran estáticas (gráfico inferior de la izquierda), esto es, no se pudieran mover, lo que ocurre sólo en el caso de un aislante, la intensidad sería similar a la del campo gravitatorio, sólo con la diferencia que es un campo repulsivo, y por lo tanto, positivo (fig 37). El campo eléctrico de una distribución de carga esférica, en una corteza conductora, sería similar por aplicación de la superficie de Gauss, a la esfera aislante del mismo radio exterior.

El campo producido por una carga puntual en el punto P, a una distancia R , sería similar al producido por una distribución de carga esférica de radio R, centrada en P como se comprueba en las fig. 38.

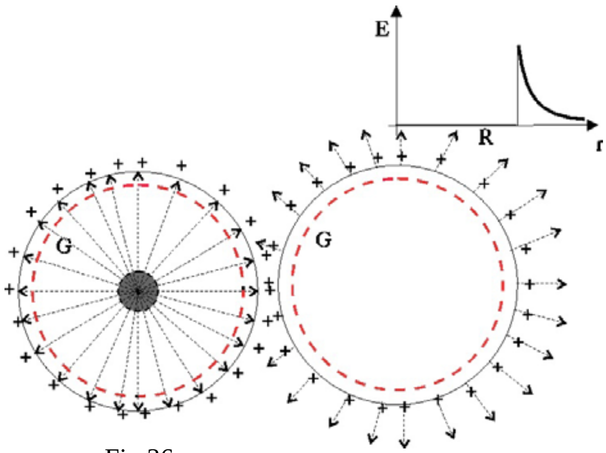
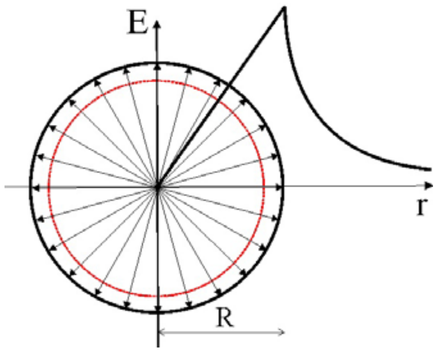


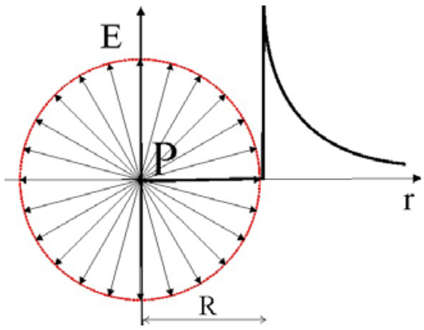
Fig.36

Fig.37



c) El hecho anterior es de gran aplicación a fin de conseguir zonas del espacio, libres de la acción de campos eléctricos y magnéticos, "jaulas de Faraday", como pudiera ser el interior de un coche. Si se pela un cable de toma de antena de televisión, se observará una envoltura en forma de malla. Lo que se busca de esta forma es proteger de la interacción electromagnética el cable interior (fig.39).

Fig.38



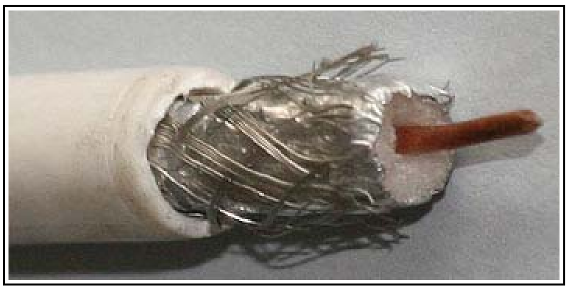


Fig.39

d) La característica de la carga positiva, de divergir, hace que se acumule en los extremos y puntas, en un cuerpo electrizado, y es el origen de "los pelos de punta", que se le ponen a una persona en contacto con un sistema electrizado.

APLICACIÓN

Ej13. ¿Cuál sería el campo eléctrico en la superficie de un cuerpo conductor electrizado?
PASOS A SEGUIR:

a) Se supone una superficie esférica electrizada y en equilibrio con carga positiva Q. Se toma una pequeña porción superficial donde exista una carga dq, y se traza una superficie de Gauss, de forma cilíndrica que encierre a dicha carga. Considerando que únicamente el flujo sale perpendicularmente por las dos bases de superficie dS del cilindro (fig.40), sin que se excluya en principio la interior, tendríamos:

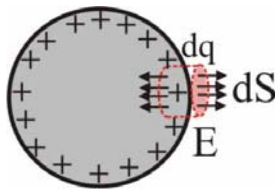


Fig.40

b) Aplicando el teorema de Gauss, el flujo será, $d\Phi = \frac{dq}{\varepsilon}$

Fig.41

c) Aplicando la fórmula del flujo tendremos que $d\Phi$ = E.2dS, dado que sale por ambas superficies, de lo que $E = \frac{dq}{2\varepsilon\, dS}$, aplicando el concepto de densidad superficial de carga σ, $\sigma = \frac{dq}{dS}$ tendremos que $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$, con el carácter vectorial saliente y perpendicular a la superficie.

d) El campo anterior hace referencia al campo en la superficie, sin embargo en lugares externos próximos a la superficie la intensidad del campo es E = **F** /**,** (Teorema de Coulomb), porque las líneas de fuerza sólo saldrían hacia afuera, por lo tanto es la mitad del anterior, como se aprecia en la fig 41. La variación es muy diferente, a la producida por una carga puntual Q (línea de puntos). Dentro sería 0, en la superficie un valor $\vec{E}_{\text{sup}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\vec{u}_S$, siendo $\vec{u}_S$, un vector unitario de la superficie perpendicular a ella y dirigido hacia fuera si la carga Q es positiva, o hacia dentro si fuera negativa, y cerca de la superficie, pero fuera de ella, sería el doble $\vec{E}_{est\,\text{sup}} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\vec{u}_S$. Quiere decir que el campo creado por un conductor cargado en equilibrio, presenta discontinuidades.

*¿Se podría aplicar el teorema de Gauss, al campo magnético **B** (también llamada inducción magnética)?*
*Es evidente que al ser las líneas de fuerza del campo magnético, cerradas, Š**I**. d**S** = 0 , por lo cual no hay variación del flujo*

9.2. TEOREMA DE GAUSS EN FORMA DIFERENCIAL

Dado que el T.d.G, relaciona el flujo con la cantidad de magnitud activa encerrada en una superficie cerrada, y a su vez conocemos que el operador DIVERGENCIA, aplicado a la variación de flujo que atraviesa una superficie cerrada es por definición: $\vec{\nabla} \bullet \vec{I} = \frac{d\Phi}{dV}$ (15)

Despejando el flujo, tendríamos que $\Phi = \int \left(\vec{\nabla} \bullet \vec{I}\right) dV$ (16)

O sea el flujo que atraviesa una superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia del campo en el volumen encerrado por esa superficie, lo cual constituye el enunciado del <u>teorema de GAUSS-OSTROGRADSKY.</u>

Para magnitudes finitas y aplicando el T.d.G a cualquier superficie, tendríamos que:
$\frac{d\Phi}{dV} = \frac{4\pi k A \cos\varphi}{V}$, siendo φ el ángulo formado por el vector superficie y el vector intensidad del campo, y surgiendo el $\cos\varphi$, por proceder el flujo de un producto escalar. Si A/V, se considera como la densidad volúmica de magnitud activa **D**, la expresión de la divergencia del campo sería: $\vec{\nabla} \bullet \vec{I} = 4\pi k \rho \cos\varphi$.

a) Para campos divergentes (ELÉCTRICO) k = k , $\cos\varphi$ = 1, $\vec{\nabla} \bullet \vec{I} = 4\pi k \rho$ (17)
b) Para campos convergentes (GRAVITATORIO) k = G , $\cos\varphi$ = -1, $\vec{\nabla} \bullet \vec{I} = -4\pi G \rho$ (18)

La ventaja de esta forma del T.d.G, está en la facilidad del cálculo de la divergencia. Por lo tanto, la densidad de magnitud activa, se puede calcular, hallando la divergencia del campo y dividiéndola por el término constante 4π k o -4π G, según el campo.